SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ

MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

4

GODINA IX.
ZAGREB
1958 — 59

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NRH

»MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST za učenike srednjih škola« izlazi u 4 broja po 40—48 stranica. Za vrijeme ferija list ne izlazi.
Pretplata za 4 broja iznosi Din 240. — Pojedini se broj prodaje po Din 60.— Pretplatu i narudžbe slati na adresu: »MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST«, Zagreb **Ilica 16/III., pošt. pretinac 165 ili na čekovni račun broj 400-73-5-1884 — Pretplata se može slati i poštanskom uputnicom**

SADRŽAJ

Strana

Dr. Z. Janković, Atom i njegova jezgra 145
Momčilo Kosmajac, Transverzalne teoreme 151
Орден Печијаре, Вилсонова и дифузиона комора 156
Nikola Lj. Ćirić, Određivanje ekstremnih vrednosti nekih funkcija bez korišćenja izvoda 158
Vladis Vujnović, Vidno polje dalekozora i njegovo iskorišćenje . . . 161

Iz moje radionice i laboratorija: Odašiljač ili prijemnik — po želji! (Dragutin Mayer) 164

Zanimljivosti i razno: Такмичење ученика гимназије НР Србије — Krožki in tekmovanje mladih matematikov — Takmičenje iz matematike za učenike svih razreda gimnazija na teritoriji AKMO — Magnetofon 170

Nove knjige: Dr. M. S. Popadić: Deljivost celih brojeva — R. S. Mitrinović: Male planete 171

Zadaci i rješenja: A. Zadaci iz matematike — B. Zadaci iz fizike — C. Rješenja iz matematike — D. Rješenja iz fizike 179
Vježbe za učenike gimnazije i srednjih stručnih škola 184
Nagrađeni rješavatelji zadataka 184
Решење укрштенице из 3 броја . . . . . 3. strana omota
Broj pretplatnika na Matematičko-fizički list na pojedinim školama 1958./59. . . . . . 3. strana omota

Uređivački odbor:

AHLIN FRANC, profesor VPŠ, Ljubljana
BANDIĆ IVAN, profesor VPŠ, Beograd
HRABAK FRANJO, dir. II. gimn., Zagreb
KOSMAJAC MOMČILO, prof. g., Cetinje
KRAJNOVIĆ MILAN, profesor, Zagreb
LAZIĆ MARKO, direktor VPŠ, Mostar
NIKOLOVSKI TOME, profesor, Skopje
ŠINDLER GUSTAV, profesor, Zagreb
VERNIĆ ELZA, profesor, Zagreb

Glavni urednici:

MARKOVIĆ dr. BRANIMIR, docent Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Zagreb
ŠKREBLIN STJEPAN, h. prof. VPŠ, Zagreb

VLASNIK SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ
IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA N. R. HRVATSKE

Tisak Grafičkog zavoda Hrvatske

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

GODINA IX. BROJ 4 | ZAGREB | ŠKOL. GOD. 1958. — 1959.

Atom i njegova jezgra

Prof. dr. ZLATKO JANKOVIĆ, Zagreb

Živimo u vrijeme, kada se spoznalo da su razvoj i rezultati nauke o atomskim jezgrama, kao i njihova primjena, najodlučniji faktor u daljnjem razvoju čovječanstva i to u dva vida: miroljubiva primjena i nuklearno naoružanje. Brojni sastanci državnika i stručnjaka nastoje otkloniti opasnost, koja je povezana s nuklearnim naoružanjem i pokusima, koji se s njim vrše. Na cijelom, pak, nizu kongresa, simpozija, naučnih konferencija i sastanaka učenjaci i stručnjaci razmatraju i raspravljaju o nuklearnim dostignućima, o dobivanju nuklearne energije i o primjeni rezultata nauke o atomskim jezgrama u ostalim granama nauke, u tehnici i privredi.[1] Upravo u godini 1958. održala se i dosada najveća naučna konferencija, II. Međunarodna konferencija za mirnodopsku primjenu atomske energije u Ženevi (1.-13. IX.), na kojoj se okupilo oko 5000 eksperata, a bilo je predano gotovo 2300 naučnih radova, koji će biti objavljeni u 33 debela sveska. Posve je prirodno upitati se, kako je došlo do toga da su danas rezultati nauke o atomskim jezgrama tako odlučni, no još prije toga je potrebno upoznati najosnovnije rezultate. Svrha je ovog i jednog narednog članka upravo ta, da u kratkim crtama iznese osnovna znanja o atomu i atomskoj jezgri, a naročito o temeljnim pojavama cijelog tog područja, o nuklearnim reakcijama — događajima, u kojima atomska jezgra zbog međudjelovanja s drugim objektima doživljuje izvjesne promjene.

Da bismo mogli kratko i precizno opisati takove događaje, potrebno je potsjetiti se na sastav atoma i same njegove jezgre. Više od dva tisućljeća protekla su od doba, kad su grčki filozofi *Anaksagora, Leukip* i *Demokrit* izrekli zamisao o atomskoj strukturi materije, pa do doba kad je ta hipoteza dobila eksperimentalnu potvrdu *Daltonovim* (1808. god.) i *Avogadrovim* (1811. god.) radovima. No kakovi su ti atomi, koji udruženi daju molekule, najmanje sastavne dijelove kemijskih spojeva? *Prout* je 1815. god. tvrdio da su svi *atomi nakupine*, zajedno čvrsto vezanih, *vodikovih atoma*, koji je najlakši od njih. No izmjerene atomske mase (odnosno težine), koje se nisu slagale s mnogokratnicima mase vodikovog atoma, kao da su odlučno govorile protiv Proutove zamisli. Polazeći od srodnih kemijskih osobina *Mendeljejev* je 1868. godine uspio poredati kemijske elemente u prirodni sistem elemenata. Mjesto pojedinog elementa u tom sustavu okarakterizirano je rednim brojem, a sam poredak, osim rijetkih iznimaka, izveden je po rastućim atomskim masama. No sva tadašnja opsežna i mnogobrojna istraživanja kemijskih osobina nisu mogla mnogo doprinijeti poznavanju samog atoma i njegove strukture, a fizikalna sredstva i istraživanja nisu također još mogla prodrijeti u njegove tajne. Međutim, kraj 19. stoljeća i početak 20. stoljeća su razdoblje, kada se znanje o atomu povećava i produbljuje

[1] Pogledati također: M. Paić: Atomska energija i njene primjene, Mat. fiz. list 3, (1952/53) 33.
B. Volarić: Radioaktivitet oborina, Mat. fiz. list 7, (1956/57) 141.
M. Paić: Porast nivoa radioaktivnosti uzrokovane nuklearnim eksplozijama, Mat. fiz. list 8, (1957/58) 1.

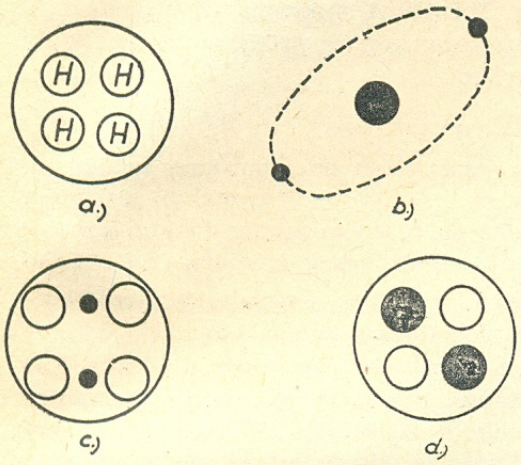
u dotad neslućenim razmjerima.[2] 1895. god. *K. Röntgen* otkriva zrake, koje su po njemu nazvane. 1896. god. *H. Becquerel* prvi upoznaje pojave prirodne radioaktivnosti. 1897. god. *J. J. Thomson* otkriva sastavni dio atoma — elektron. 1911. god. *E. Rutherford,* na osnovu višegodišnjih ispitivanja pojava radioaktivnosti i prolaza alfa zraka (za koje je još 1903. god. utvrdio da su sastavni dijelovi helijeva atoma) kroz materiju, dolazi do zaključka da su atomi izgrađeni iz pozitivno nabijene centralne jezgre i negativno nabijenih lakih elektrona, koji kruže oko nje. Gotovo sva masa atoma koncentrirana je u jezgri, koja zaprema vrlo mali dio atomskog volumena, dok laki elektroni kruže u relativno većim daljinama oko jezgre, sve zajedno nalik na Sunčev sistem u malome. Elektroni čine elektronski omotač atomske jezgre. Njihov ukupni negativni električni naboj jednak je i suprotan pozitivnom naboju jezgre, pa je atom prema van električki neutralan. Elektron drži na okupu oko jezgre privlačna Coulombova sila, kojom jezgra na njih djeluje.

Usporedo s tim razvojem napredovala je i teorijska misao, koja je trebala kvantitativno objasniti eksperimentalno utvrđene zakonitosti. 1900. god., napustivši zamisao da je energija kontinuirana veličina, objasnio je *M. Planck* zakone zračenja crnog tijela. 1905. god. proveo je *A. Einstein* analizu nekih osnovnih pretpostavki klasične fizike i objavio specijalnu teoriju relativnosti, u kojoj se kao jedna od najvažnijih posljedica pojavljuje i zakon o ekvivalenciji mase i energije. 1913. god. objašnjava *N. Bohr* vodikov spektar na osnovu Rutherfordova modela i Planckove kvantne hipoteze, uz naročiti zahtjev da se elektron može gibati oko jezgre samo u nekim stazama i da pri kruženju po njima ne zrači energiju. Time je bila otvorena mogućnost da se pokuša objasniti ogromno mnoštvo spektara, a da se ujedno istraži i utvrdi raspored elektrona i njihovih staza u elektronskom omotaču atomske jezgre. No na tom putu ubrzo su se ispriječile teškoće. Struktura elektronskog omotača i same elektronske staze bivale su sve zamršenije i nepreglednije sa sve većim brojem elektrona i goleme poteškoće stajale su na putu matematičkoj obradi. No, pokazalo se osim toga da znatne principijelne poteškoće onemogućuju napredak. Trebalo je, naime, naći i formulirati sustav zakona, koji vladaju u atomskom području, za koje su se zakoni klasične fizike dobrim dijelom pokazali neprikladni. *A. Einstein* je još 1905. god. pokazao da uz valnu prirodu svjetlosti treba uzeti u obzir i njen korpuskularni vid i tako pomoću fotona — kvanata svjetlosti — objasnio fotoelektrični efekt. *L. de Broglie* je 1924. god. prvi istaknuo da se kod objekata, kod kojih se dotada razmatrao samo korpuskularni vid, treba uzeti u obzir i njihov valni aspekt. Tako je pridružio elektronima i atomima valni aspekt, koji je 1927. god. dobio punu eksperimentalnu potvrdu. Na taj način stvorena je idejna podloga na kojoj se razvila *Schrödingerova* valna mehanika i *Heisenbergova* matrična mehanika, kao dva ravnopravna i ekvivalentna vida kvantne mehanike, koju je u općem obliku 1928. godine formulirao *P. A. M. Dirac.*

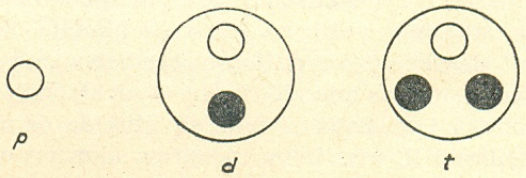
No vratimo se samoj jezgri atoma. 1912. god. otkrio je *J. J. Thomson* činjenicu da kemijske osobine atoma nisu jednoznačno vezane s atomskim masama već sa rednim brojem atoma. On je tada našao dva po masi različita atoma elementa neona, koji imaju, dakle, različite jezgre ali iste kemijske osobine. 1919. god. je *E. Rutherford* prvi put izveo jednu nuklearnu reakciju ozračivši alfa zrakama (jezgre atoma helija) dušik i pokazao da se pritom jezgre dušika mogu pretvarati u jezgre kisika uz emisiju jednog protona. Taj neobično važan događaj otvorio je neslućene mogućnosti povezane s nuklearnim područjem. U toku daljnjih godina sabirao se obilan materijal o nuklearnim reakcijama, koje su bile izazvane na razne načine, no znanje o izgradnji same atomske jezgre još nije počivalo na čvrstim temeljima. Proutova hipoteza pojavljuje se u nešto izmijenjenom obliku: *jezgru atoma sačinjavaju jezgre vodikovih atoma — protoni — i elektroni u jezgri,* i to tako da je broj protona jednak

[2] Neki podaci u: V. Deduš: O rađanju atomske fizike, Mat. fiz. list 7, (1956/57) 1.

tzv. atomskom broju, a razlika broja protona i tih elektrona jednaka rednom broju elementa. Razlika između zbrojenih masa svih protona (i elektrona) i mase same jezgre dolazila bi odatle što protoni, koji su podvrgnuti Coulombovoj odbojnoj sili, međusobno djeluju i privlačnom silom, koja je vrlo kratkog dosega i velikog intenziteta — nuklearnom silom. Po Einsteinovom zakonu ekvivalencije mase i energije ta razlika predstavljala bi energiju vezanja cjelokupne jezgre, tj. količinu energije, koju je potrebno unijeti u jezgru pa da bi je razbili na sastavne dijelove. Međutim, ni ovako izmijenjena prvobitna Proutova hipoteza nije zadovoljavala. 1932. godine *J. Chadwick* je eksperimentalno utvrdio da postoji čestica nešto malo veće mase od protona, no bez električnog naboja — neutron. Sada je i građa atomske jezgre postala jasnija: *atomske jezgre su građene iz protona i neutrona, koje drži na okupu nuklearna sila,* koja nadvladava Coulombovu odbojnu silu među protonima u nuklearnim dimenzijama. Ta nuklearna sila, prema današnjem znanju, neovisna je o naboju, tj. jednaka nuklearna sila vlada među dva protona, među dva neutrona, između protona i neutrona.



Sl. 1. Razvoj zamisli o izgradnji atoma i atomske jezgre ilustriran na primjeru atoma helija (He) i njegove jezgre $_2He^4$, tj. α čestice: *a*) Po Proutu atom helija sastoji se od 4 atoma vodika H; *b*) Po Rutherfordu u atomu helija oko centralne jezgre (crni krug) naboja $2e_p$ kruže dva elektrona naboja $2e_-$; *c*) izmijenjena Proutova hipoteza: jezgra helija $_2He^4$ sastoji se iz 4 protona (bijeli kružići) i 2 elektrona u jezgri (crne točke); *d*) stvarna građa jezgre helija: $_2He^4$ sastoji se iz 2 protona (bijeli kružići) i 2 neutrona (crni kružići).



Sl. 2. Shematski prikaz jezgara triju izotopa vodika (bijeli kružić označuje proton, crni kružić neutron): *p* proton, *d* deuteron, *t* triton.

Rezimirajmo sada građu atoma i popunimo je nekim pojedinostima. Jezgra je sastavljena od Z protona *(p)* (masa* protona $m_p = 1{,}007593$, naboj protona $e_p = +4{,}8028 \cdot 10^{-10}$ c. g. s. jedinica naboja) i N neutrona *(n)* (masa* neutrona $m_n = 1{,}008982$), koji su bez naboja. Atomski broj A odgovara broju nukleona (zajednički naziv za proton i neutron) u jezgri $A = Z + N$, a redni broj broj elementa odgovara broju protona u jezgri *(Z)*. Jezgru simbolički označavamo $_ZX_N{}^A$ gdje X označuje kemijski simbol. Tako je jezgra elementa ugljika (C-carbonium), koja ima atomski broj 12, a redni broj 6 obilježena s $_6C_6{}^{12}$ ili kraće $_6C^{12}$ a ona ugljikova jezgra, koja ima atomski broj 14 (poznati izotop ugljika) $_6C^{12}$. Katkad se još kraće piše C^{14}, jer se iz poznavanja kemijskog simbola zna redni broj elementa Z, a onda uz naznačeni atomski broj A također se zna i broj neutrona N za naznačenu jezgru. Prema tome kraće oznake su $_ZX^A (N = A - Z)$ odnosno X^A (iz X znamo Z, a onda $A - Z = N$).

Obzirom na A, Z i N možemo jezgre klasificirati u izobare (one jezgre, koje imaju isti atomski broj A), izotope (one jezgre, koje imaju isti redni broj Z) i izotone (one jezgre, koje imaju isti broj neutrona N). Tako su jezgra dušika $_7N^{16}$ i kisika $_8O^{16}$ izobarne; jezgre kisika $_8O^{16}$, $_8O^{17}$, $_8O^{18}$ su izotopne, a jezgre dušika $_7N^{15}$ i kisika $_8O^{16}$ izotone. Pojedini elementi mogu imati veći broj izotopa, koji svi zbog istog rednog

* Izražena u jedinicama, koje se upotrebljavaju u nuklearnim naukama, t. j. jedinica mase odgovara masi 1/16 kisikova atoma O^{16} i izražena u gramima iznosi 1 j. m. = $1{,}6599 \cdot 10^{-24}$ g.

broja Z imaju elektronski omotač sa Z elektrona (pa prema tome iste kemijske i neke fizikalne osobine). Tako imamo tri izotopa ${}_1H^1$ (uobičajeno p, proton), ${}_1H^2$ (uobičajeno d, deuteron) i ${}_1H^3$ (uobičajeno t, triton) jezgre elementa vodika (H — hydrogenium); atomi vodika s težim jezgrama nose naziv deuterij i tricij. Elementi u prirodi su smjese izotopa u određenom omjeru: tako kisik u uzduhu sadrži 99,759% jezgara ${}_8O^{16}$, 0,037% jezgara ${}_8O^{17}$ i 0,204% jezgara ${}_8O^{18}$.

Jezgra zaprema vrlo mali dio atomskog volumena i dok su linearne dimenzije atomskog volumena reda veličine 10^{-8} cm, linearne dimenzije jezgre su gotovo deset tisuću puta manje, tj. reda veličine 10^{-12} cm. Točnije A nukleona (Z protona i N neutrona), koji tvore jezgru, zauzimaju dio prostora, koji je približno kugla. Polumjer te kugle R ovisi o atomskom broju A ovako:

$$R = r_0 \sqrt[3]{A} \qquad r_0 \approx 1{,}2 - 1{,}4 \cdot 10^{-13}\ cm.$$

Elektronski omotač u neutralnom atomu, razmješten po atomskom volumenu, sadrži upravo Z elektrona, (masa elektrona $m_e = 9{,}108 \cdot 10^{-28}$ g, naboj elektrona $e = -4{,}8028 \cdot 10^{-10}$ c. g. s. jedinica naboja), tako da se izvan atoma dokida elektrostatsko djelovanje naboja jezgre ($Z\,e_p$) i naboja elektronskog omotača ($Z\,e$). Tako u atomu bilo C^{12} bilo C^{14}, pozitivni naboj jezgre iznosi $6\,e_p$, a negativni naboj elektronskog omotača $6\,e$ i njihova se djelovanja poništavaju prema van.

U atomu specifični kvantni zakoni priječe da se elektroni sruše u jezgru. Naprotiv, elektroni su raspoređeni u određena stanja, čije se karakteristike skokomice mijenjaju. Da olakšamo tu situaciju zornom slikom — elektroni »kruže« oko jezgre po »stazama« nalik na kruženje planeta oko Sunca, a određeni broj srodnih »staza« ćini »ljuske« (s još daljnjom razdiobom na podljuske) počevši od onih manjih dimenzija prema većima: K-ljuska (2 elektrona), L-ljuska (8 elektrona), M-ljuska (18 elektrona) i t. d. Sada je lako shvatiti da će atom postati jednostruko, dvostruko i t. d. pozitivno ili negativno ioniziran, ako mu otrgnemo (ili pridodamo) jedan, dva i t. d. elektrona iz vanjskog dijela omotača. S druge strane možemo očekivati da će i udruživanje atoma u molekule ovisiti najvećim dijelom o situaciji u izvanjem dijelu elektronskih omotača atoma, koji ulaze u spoj. Prema tome i kemijski vez i valencija, tj. kemijsko ponašanje i položaj elemenata u periodskom sistemu ovise o broju elektrona Z, a sličnost u konfiguraciji i rasporedu elektrona u elektronskim omotačima tumači opaženu periodičnost kemijskih svojstava elemenata.

Sada je također lako razumjeti i mnoge fizikalne manifestacije atoma. Tako će linije bilo vidljivog bilo rentgenskog spektra biti emitirane ili apsorbirane, kad se promijeni »staza« elektrona u elektronskom omotaču, a razlika je samo u tome kolika energetska promjena prati taj događaj. Naravno, specifični kvantni zakoni ograničavaju moguće promjene, a prema Plancku energetska razlika $\triangle E$ i frekvencija emitirane (odnosno apsorbirane) svjetlosti ν povezane su ovom relacijom

$$h\nu = \triangle E,$$

gdje je h Planckova univerzalna konstanta $h = 6{,}625 \cdot 10^{-27}$ erg s.

Najniže energetsko stanje elektronskog omotača nazivamo osnovnim, a stanja s višom energijom su pobuđena stanja. Pri emisiji, dakle, zbiva se prijelaz iz viših pobuđenih stanja u niža, odnosno osnovno, dok su kod apsorpcije obrnuti prijelazi.

Vratimo se ponovno k jezgri i izračunajmo njenu masu. Ako zbrojimo mase svih protona i neutrona u jezgri, vidjet ćemo da je stvarno izmjerena masa jezgre manja. Prema tome imamo pozitivnu razliku

$$\triangle = Z\,m_p + N\,m_n - M_A.$$

Tu razliku masa možemo pomoću Einsteinovog zakona ekvivalencije mase i energije (svakoj energiji odgovara određena masa i obrnuto)

$$E = m\,c^2,\ c \text{ (brzina svjetlosti)} = 2{,}99793 \cdot 10^{10}\ \text{cm s}^{-1}$$

preračunati u takozvanu energiju vezanja $\triangle \cdot c^2$. Ako ovu veličinu podijelimo s brojem svih nukleona A, dobivamo prosječnu energiju vezanja po nukleonu

$$\frac{\triangle c^2}{A},$$

koja se kreće oko 7-8 MeV za jezgre u sredini periodičnog sistema, a nešto je manja za elemente na početku i kraju periodskog sistema. Za deuteron ona je znatno niža 1,11 MeV, znak da će se relativno lako moći rascijepiti.

Jezgra je, dakle, sistem od A nukleona, pa se u analogiji s ponašanjem elektronskog omotača i ona može nalaziti uslijed specifičnih okolnosti i zahvata u raznim stanjima, od kojih ono s najnižom energijom nazivamo osnovnim stanjem, a ona s višom energijom su pobuđena stanja. No, za razliku od elektronskog omotača, jezgra se može podići u više energetsko stanje, ili osloboditi suviška energije, na više načina. Ponajprije, jezgra može emitirati (odnosno apsorbirati) fotone gama zraka (valovi vrlo malene duljine) i odnosi su dosta slični prije spomenutim kod rentgenskih zraka. Zatim jezgra može apsorbirati čestice, koje dođu u područje djelovanja nuklearnih sila njenih nukleona i tu Coulombovo odbijanje pozitivnih čestica čini da neutroni lakše prodiru u jezgre nego pozitivno nabijene čestice. S druge strane pobuđene jezgre mogu se osloboditi suviška energije uz određene uvjete i emisijom čestica. Jedan naročiti način jest beta radioaktivnost, gdje neki neutron u jezgri uz emisiju elektrona prelazi u proton.

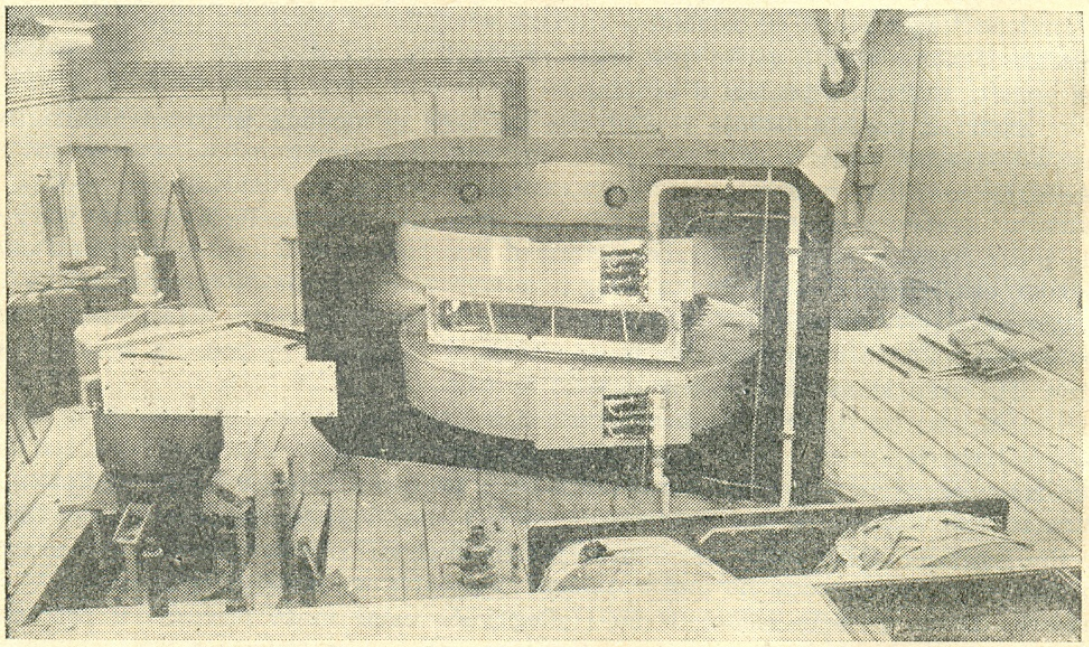
Sada su postale jasnije i okolnosti uz koje se događa prirodni radioaktivni raspad. Jezgre nekih teških elemenata (na pr. uran, torij) oslobađaju se suviška energije emisijom fotona gama zraka, odnosno prijelazom neutrona u proton uz emisiju elektrona (beta zrake), ili pak emisijom alfa čestice (alfa zrake). Naravno da jedan prijelaz može biti praćen daljnjim prijelazima, dok god je povoljna energetska situacija, i svi elementi takovog niza čine jednu radioaktivnu porodicu (na pr. uranova, torijeva porodica). Takve procese karakterizira vjerojatnost raspada, odnosno polovično vrijeme raspada (a to je ono vrijeme u kojem se početna količina jezgara iste vrsti smanji na polovicu).

1932. god. otkrio je *C. Anderson* česticu analognu elektronu, ali suprotnog naboja — pozitron ($m_{e^+} = m_{e^-}$, $e^+ = -e^-$). 1934. god. utvrdili su *I. Curie* i *F. Joliot* da i umjetno pobuđene jezgre (produkti nuklearnih reakcija) mogu biti beta radioaktivne i da uz one, koje emitiraju elektrone, postoje i one, koje emitiraju pozitrone. To se u tim jezgrama zbiva uslijed pretvorbe jednog protona u neutron. Naravno, slobodan proton zbog manje mase ne može prelaziti u neutron uz emisiju pozitrona, dok slobodni neutron je beta radioaktivan i zbog veće mase može prelaziti u proton uz emisiju elektrona (polovično vrijeme toga procesa je oko 12 minuta).

Prema tome imamo jezgara, koje u toku vremena mijenjaju broj svojih protona Z odnosno broj neutrona N. Na takove nestabilne jezgre nailazimo u prirodi kod prirodno radioaktivnih elemenata. Nuklearne reakcije pružit će upravo mogućnost da i na umjetan način proizvedemo nove, nestabilne, jezgre i da tako izotopima nekog elementa, koje nailazimo u njegovu prirodnom sastavu, pridodamo nove, umjetno radioaktivne.

Radioaktivni izotopi igraju ogromnu ulogu u primjenama kao obilježeni atomi, pomoću kojih se mogu »markirati« najraznovrsniji kemijski spojevi, ako se takovi atomi namjesto stabilnih ugrade u molekule. Promatranje odvijanja raznih procesa u živom organizmu, medicinska primjena u ozračivanju bolesnog tkiva, kontrola tehnoloških procesa, samo su neki vidovi primjene radioaktivnih izotopa, koji svojim zračenjem pokazuju mjesto gdje se nalaze, a mogu doprijeti i ozračiti i najskrovitija mjesta organizma. Jedna od senzacionalnih primjena je određivanje arheoloških doba pomoću radioaktivnog ugljika ${}_6C^{14}$, a veliku ulogu u liječenju tumora igra ozračivanje pomoću gama zraka iz radioaktivnog kobalta ${}_{27}Co^{60}$.

Kazali smo da su nuklearne reakcije događaji u kojima atomska jezgra zbog međudjelovanja s drugim objektima doživljuje izvjesne promjene. Prema tome moramo imati na raspolaganju te objekte — nazovimo ih projektilima — i dovesti ih u međudjelovanje s određenim jezgrama — nazovimo ih metama. Vidjeli smo da jezgra zaprema vrlo malen dio atomskog volumena, gdje su nukleoni vrlo zgusnuto smješteni, dok u ostalom dijelu volumena nalaze se elektroni vrlo rijetko porazmješteni. Da dođe do prisnog međudjelovanja moraju projektili probiti elektronski omotač atoma-mete i doći u blizinu same jezgre-mete. Probijanje elektronskog omotača relativno malo utječe na projektile, koji imaju mnogo veću masu od elektrona, a to probijanje olakšano je i time što je elektronski omotač rijedak, dakle prozračan. Coulombovo djelovanje jezgre-mete i pozitivno nabijenog projektila može biti znatno i priječi njihovo zbliženje. Odatle je jasno da takovi projektili moraju imati dovoljno kinetičke energije, pa da se mogu približiti jezgri-meti. Slična je situacija između djelovanja elektronskog omotača i elektrona-projektila, koji treba da ga probije, pa da se približi jezgri-meti. Neutroni i fotoni gama zraka mogu se sasvim lako, bez zapreke, približiti jezgri-meti.



Sl. 3. Ciklotron Instituta „Ruđer Bošković" (u izgradnji), Zagreb

Možemo, dakle, ocijeniti od kolike je važnosti sa stajališta nadvladavanja Coulombovog odbijanja, a onda i ispitivanja reakcija s jezgrom-metom pri sve većim energijama, imati mogućnost ubrzati nabijene projektile do sve većih brzina. Naprave, koje to omogućuju — akceleratori — bile su konstruirane ovim slijedom: Van de Graaf 1931. godine, Cockroft-Walton (kaskadni akcelerator) 1932. godine, Lawrence-Livingston (ciklotron) 1934. godine.[3]

U našoj zemlji velika pažnja poklanja se razvoju nuklearnih nauka i u naša tri nuklearna instituta: »Boris Kidrič« (Vinča), »Ruđer Bošković« (Zagreb) i »Jožef Štefan« (Ljubljana) podižu se i potrebni akceleratori uz ostale nužne aparature. Tako imamo tri kaskadna akceleratora, koji ubrzavaju projektile deuterone do 200 keV,

[3] Daljnje podatke o akceleratorima čitalac može naći u: D. Mayer: Atomski akceleratori, Mat. fiz. list 3, (1952/53), 73; M. Lažanski: Akceleratori, Mat. fiz. list 7, (1956/57), 129; P. Tomaš: Neutronski generator Instituta „Rudjer Bošković", Mat. fiz. list 9, (1958/59), 1.

jedan akcelerator (kaskadni) od 1,5 MeV; betatron, koji ubrzava elektrone do 30 MeV, jedan akcelerator tipa Van de Graaf, koji ubrzava nabijene čestice do 2 MeV i najveći akcelerator, ciklotron Instituta »Ruđer Bošković« u Zagrebu, koji ubrzava deuterone do 16 MeV.

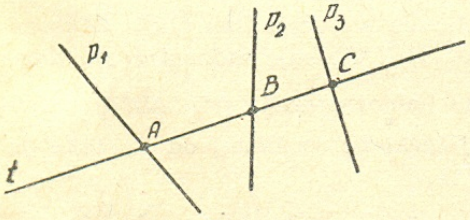
U proteklih dva i po decenija razvili su se razni tipovi akceleratora do neslućenih razmjera i u pogledu energija ubrzanih čestica i u pogledu svojih konstrukcija. Tako organizacija CERN (Evropski centar za nuklearna istraživanja, u kojem sudjeluje i Jugoslavija) u Ženevi izgrađuje akcelerator oblika prstena s promjerom 200 m, koji će ubrzavati protone do 25.000 MeV (ili kraće 25 BeV: anglosaski B(illion) namjesto milijarda!). Sovjetski akcelerator od 10 BeV u Dubnu nalazi se u pogonu, američki akcelerator od 30 BeV u Brookhavenu nalazi se u gradnji, britanski od 7,5 BeV upravo se započeo konstruirati, dok su francuski u Saclayu od 2,5 BeV i talijanski u Frascattiju od 1,1 BeV nalaze u pokusnom pogonu.

Tako su umjetno ubrzane čestice stale uz bok onim projektilima, koje već u prirodi nalazimo — prirodne alfa, beta i gama zrake, pa čestice iz kozmičkih zraka.[4] Ove posljednje imaju doduše vanredno velike energije, no gustoća njihova mlaza je vrlo malena, pa su događaji, koje želimo promatrati, vrlo rijetki. Vidjeli smo, naime, da je atom gotovo prozračan i da jezgra čini njegov vanredno sitni centralni dio. Prema tome malena je vjerojatnost da se jedna čestica-projektil nađe dovoljno blizu samoj jezgri i da dođe do međudjelovanja, a ta vjerojatnost pogotovo je malena, ako je mlaz projektila slab. Također je vrlo mala vjerojatnost, ukoliko atomi-mete čine tanki sloj, da koji od produkata nuklearne reakcije dođe još s nekom jezgrom-metom u međudjelovanje.

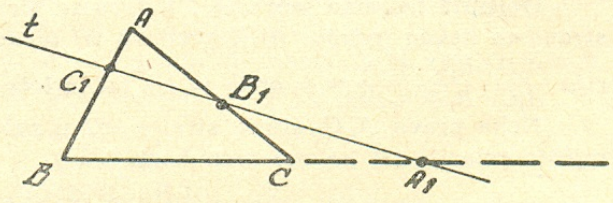
Transverzalne teoreme

MOMČILO KOSMAJAC, Cetinje

U vezi sa »pojmom transverzale« (presječnica) u planimetriji se javljaju teoreme koje se ne obrađuju u srednjoj školi zbog preopširnosti programa. U srednjoškolskoj matematici pojam transverzale se koristi za proširivanje pojma ugla, odnosno za davanje pojmova raznih tipova uglova (unutrašnji, spoljašnji, naporedni ili saglasni, suprotni i naizmjenični). Svi ovi uglovi nailaze na veliku primjenu pri dokazivanju mnogih teorema, ali se ne spominju t. zv. »transverzalne teoreme«, koje se u specijalnim matematičkim disciplinama, t. j. u »projektivnoj« i »sintetičkoj« geometriji mnogo koriste. Te teoreme mogu se obraditi i planimetriskim metodama i sa onim što treba da zna svaki srednjoškolac iz planimetrije, pa će stoga i ovaj članak biti posvećen njima.



Sl. 1.



Sl. 2.

Definicija 1.

Svaka prava t koja siječe dvije ili više pravih u ravni naziva se transverzala ili presječnica. (sl. 1.).

[4] O kozmičkim zrakama više u: I. Babić-Gjalski: Kozmičke zrake, Mat. fiz. list 3, (1952/53), 1.

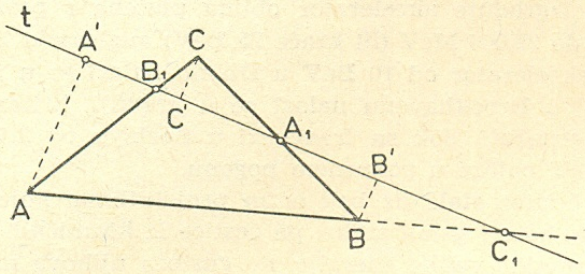
Definicija 2.

Svaka prava t koja siječe strane trougla (od kojih jednu u produžetku) naziva se transverzala ili presječnica (sl. 2.).

Teorema 1.

Ako se strane nekog trougla ABC presijeku nekom pravom t u točkama A^1, B^1, C^1, *onda između tako dobijenih segmenata na stranama trougla postoji relacija*

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=1 \quad \text{(sl. 3).}$$



Sl. 3.

Za dokaz ove identičnosti potrebno je iz tjemena trougla spustiti normale do presjeka sa pravom *t*, i neka su tá normalna rastojanja od *t*: *AA'*, *BB'* i *CC'*.

Iz sličnosti sledećih parova trouglova: $\triangle AA'B_1 \sim \triangle CC'B_1$, $\triangle BB'A_1 \sim CC'A_1$ i $\triangle AA'C_1 \sim \triangle BB'C_1$ slijedi:

$$\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{BB'}{CC'},\quad \frac{B_1C}{B_1A}=\frac{CC'}{AA'} \text{ i } \frac{C_1A}{C_1B}=\frac{AA'}{BB'},$$

čijim množenjem dobijamo

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=\frac{BB'}{CC'}\cdot\frac{CC'}{AA'}\cdot\frac{AA'}{BB'}=1 \qquad (1)$$

što je i trebalo dokazati.

Napomena 1. Ako je transverzala $t \parallel$ strani *AB*, tačka C_1 je u ∞, odnos $\frac{C_1A}{C_1B}=1$. Relacija (1) se onda reducira na

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}=1 \quad \text{t. j.} \quad \frac{A_1B}{A_1C}=\frac{B_1A}{B_1C}$$

a ovo nije ništa drugo do poznata teorema: *»Svaka prava koja siječe dvije strane trougla, a paralelna je trećoj, dijeli strane trougla u proporcionalnim odnosima.«*

Ako su *CA* i *CB* paralelne, *C* je u ∞, pa imamo zbog $\frac{B_1C}{A_1C}=1$.

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{A_1B}{B_1A}\cdot\frac{B_1C}{A_1C}=\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{A_1B}{B_1A}=1,$$

t. j. $\frac{C_1A}{C_1B}=\frac{B_1A}{A_1B}$, odnosno teoremu: *»Svaka prava koja je paralelna s jednom stranom trougla obrazuje sa ostalim stranama trougao sličan prvom.«*

Teorema 2. (Menelajeva[1] teorema)

Obrnuta teorema teoreme 1 naziva se Menelajeva teorema. Ona glasi: *»Ako na stranama nekog trougla ABC uzmemo tri tačke* A_1, B_1 *i* C_1, *koje zadovoljavaju relaciju* $\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=1$, *onda te tri tačke leže na jednoj pravoj.« (sl. 3.).*

Neka prava A_1C_1 siječe stranu *AC* u nekoj tački B_1' različitoj od B_1, tako da mjesto relacije (1) imamo jednakost:

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B'_1C}{B'_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=1 \qquad (2)$$

onda jednakost, pri sravnjivanju s prethodnom relacijom (1), pokazuje da je $\frac{B'_1C}{B'_1A}=\frac{B_1C}{B_1A}$, t. j. slijedi da se tačke B_1 i B_1' poklapaju.

---

[1] Menelaj (Menelaos) je grčki matematičar, koji je živio u I. v. u Aleksandriji. Napisao je djelo „Nauke o lopti" u tri knjige. Smatra se za utemeljača sferne trigonometrije.

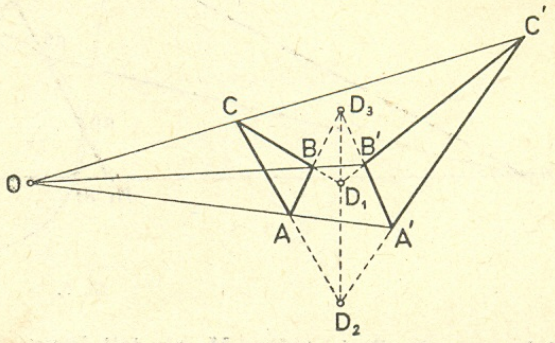
Menelajevu teoremu možemo iskazati i ovako: *»Kada jedna prava siječe sve tri strane trougla (jednu od njih u produžetku), proizvod tri neuzastopna otsječka strana jednak je proizvodu druga tri.«*

Dokažite sami ovu teoremu, koristeći se sl. 3. Dokaz se sprovodi preko sličnosti trouglova, gotovo na isti način kako je to već pokazano.

Primjer: Data su dva trougla ABC i $A'B'C'$. Odgovarajuća tjemena trouglova t. j. A i A', B i B', C i C' leže na pravama koje se sijeku u jednoj tački O. Dokazati da produžetci odgovarajućih strana leže na jednoj istoj pravoj.

Nacrtajmo trouglove ABC i $A'B'C'$ prema zahtjevu u zadatku (sl. 4.). Neka je D_1 tačka presjeka pravih BC i $B'C'$; tačka D_2 tačka presjeka CA i $C'A'$, a tačka D_3 presjek pravih AB i $A'B'$. Želimo da pokažemo da tačke D_1, D_2, D_3 leže na jednoj istoj pravoj, odnosno da zadovoljavaju jednakost

$$\frac{D_1B}{D_1C}\cdot\frac{D_2C}{D_2A}\cdot\frac{D_3A}{D_3B}=1.$$



Sl. 4.

Stvarno, $\triangle OBC$ presječen transverzalom $D_1B'C'$ daje:

$$\frac{D_1B}{D_1C}\cdot\frac{C'C}{C'O}\cdot\frac{B'O}{B'B}=1.$$

Isto tako $\triangle OCA$ i $\triangle OAB$, presječeni odgovarajućim transverzalama $D_2C'A'$ $D_3A'B'$ daju:

$$\frac{D_2C}{D_2A}\cdot\frac{A'A}{A'O}\cdot\frac{C'O}{C'C}=1 \quad \text{i} \quad \frac{D_3A}{D_3B}\cdot\frac{B'B}{B'O}\cdot\frac{A'O}{A'A}=1.$$

Pomnoživši ove tri jednakosti i skrativši s $A'A$, $B'B$, $C'C$, $A'O$,$B'O$ i $C'O$ dobijamo traženu relaciju, t. j.

$$\frac{D_1B}{D_1C}\cdot\frac{D_2C}{D_2A}\cdot\frac{D_3A}{D_3B}=1.$$

T e o r e m a 3. (Pascal[2]-ova teorema)

»U svakom šestouglu upisanom u krugu tačke presjeka produžetaka suprotnih strana leže na jednoj pravoj.«

Neka je $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ šestougao upisan u krugu k (sl. 5.), čije su suprotne strane: A_1A_2 i A_4A_5, A_2A_3 i A_5A_6, A_3A_4 i A_6A_1. Neka se A_1A_2 i A_4A_5 sijeku u N_3, strane A_2A_3 i A_5A_6 u N_1, a strane A_3A_4 i A_6A_1 u N_2. Uočimo trougao $M_1M_2M_3$, obrazovan stranama A_1A_2, A_3A_4 i A_5A_6, drugim riječima stranama datog šestougla, uzimajući svaku drugu tačku presjeka produžetaka navedenih strana.

Tačke N_1, N_2 i N_3 raspoređene su na odnosnim stranama M_3M_1, M_3M_2 i M_1M_2 toga trougla. Ove tačke leže na jednoj pravoj, ako zadovoljavaju odnos

$$\frac{N_1M_3}{N_1M_1}\cdot\frac{N_2M_2}{N_2M_3}\cdot\frac{N_3M_1}{N_3M_2}=1. \tag{3}$$

No, ako presiječemo strane $\triangle M_1M_2M_3$ redom ostalim stranama A_4A_5, A_6A_1 i A_2A_3 šestougla, dobijamo odnose:

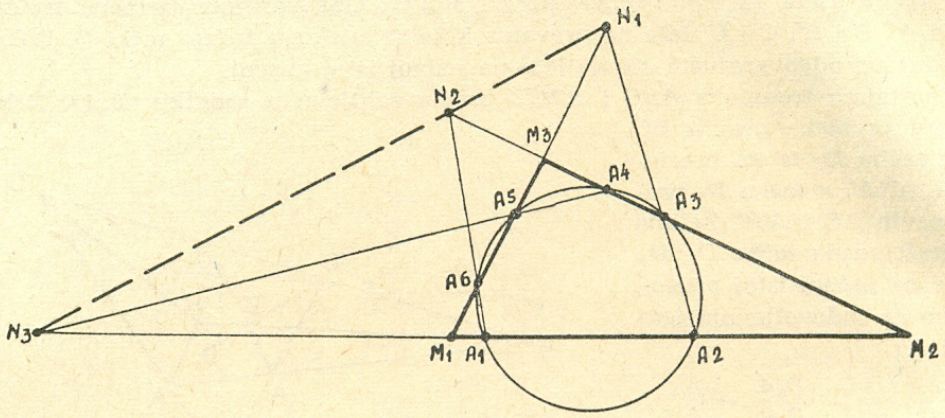
$$\frac{N_3M_1}{N_3M_2}\cdot\frac{A_4M_2}{A_4M_3}\cdot\frac{A_5M_3}{A_5M_1}=1;\quad \frac{N_2M_2}{N_2M_3}\cdot\frac{A_6M_3}{A_6M_1}\cdot\frac{A_1M_1}{A_1M_2}=1 \quad \text{i} \quad \frac{N_1M_3}{N_1M_1}\cdot\frac{A_2M_1}{A_2M_2}\cdot\frac{A_3M_2}{A_3M_3}=1.$$

[2] Pascal (1623—1662) je francuski matematičar. Poznat je po svojim radovima iz oblasti geometrije i ostalih matematičkih disciplina.

Pomnoživši ove jednakosti, grupišući na pogodan način pojedine činioce, dobijamo

$$\frac{N_3M_1}{N_3M_2}\cdot\frac{N_2M_2}{N_2M_3}\cdot\frac{N_1M_3}{N_1M_1}\cdot\frac{A_6M_3\cdot A_5M_3}{A_4M_3\cdot A_3M_3}\cdot\frac{A_2M_1\cdot A_1M_1}{A_5M_1\cdot A_6M_1}\cdot\frac{A_4M_2\cdot A_3M_2}{A_1M_2\cdot A_2M_2}=1. \qquad (4)$$

Svaki od tri poslednja razlomka u jednakosti (4), koji se nalaze na lijevoj strani, jednaka su 1. Naprimer $A_6M_3\cdot A_5M_3$ i $A_4M_3\cdot A_3M_3$ jednaki su kao proizvodi



Sl. 5.

otsječaka povučenih iz tačke M_3 na isti krug. (Teoreme o proporcionalnim dužima kod kruga). Na taj način dobijamo jednakost (3), a samim tim je i teorema dokazana.

Napomena 2. Ovaj dokaz važi i u slučaju kada se tačke A_1 i A_2, A_3 i A_4, A_5 i A_6 poklapaju. Strane $\triangle M_1M_2M_3$ javljaju se tada kao tangente kruga. U tom slučaju gornja teorema poprima sledeću formu: »*Tangente povučene kroz tjemena trougla upisanog u krugu, sijeku odgovarajuće strane u tačkama, koje leže na istoj pravoj.*«

Teorema 4.

»*Ako kroz tjemena* $\triangle ABC$ *postavimo prave* AA_1, BB_1 *i* CC_1, *koje se sijeku u jednoj istoj tački* O, *to te prave sijeku strane* BC, CA *i* AB *u odgovarajućim trima tačkama* A_1, B_1 *i* C_1, *tako da zadovoljavaju relaciju*

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=-1 \quad \text{(sl. 6)} \qquad (5)$$

Stvarno, $\triangle AA_1C$ presječen transverzalom BB_1 daje:

$$\frac{BA_1}{BC}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{OA}{OA_1}=1.$$

Trougao ABA_1 presječen transverzalom CC_1 daje:

$$\frac{CA_1}{CB}\cdot\frac{C_1B}{C_1A}\cdot\frac{OA}{OA_1}=1.$$

Pri dijeljenju ovih dviju jednakosti dobijemo:

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{CB}{BC}=1.$$

Ova jednakost postaje jednaka jednakosti (5), pošto je $CB=-BC$. Znači orijentacija duži je neobično važna za dokaz ove teoreme.

Teorema 5. (Ceva[3]-ina teorema)

Obrnuta teorema teoreme 4 naziva se Cevina teorema. Ona glasi: »*Ako na stranama trougla* ABC *uzmemo tri tačke* A_1, B_1, C_1 *tako da zadovoljavaju jednakost*

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1A}=-1,$$

to prave AA_1, BB_1 *i* CC_1 *prolaze kroz jednu istu tačku.*«

[3] Ceva (Čeva) italijanski matematičar XVII i XVIII v.

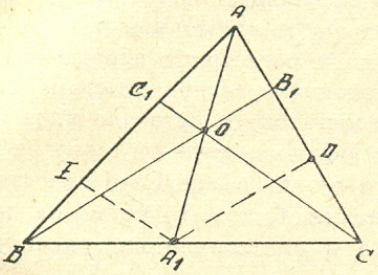
Za dokaz ove teoreme koristimo se sl. 6. Stvarno, neka je O tačka presjeka AA_1 i BB_1 i neka prava CO siječe stranu AB u nekoj tački C_1' različitoj od C_1, tada je po teoremi 4.

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C'_1A}{C'_1B} = -1.$$

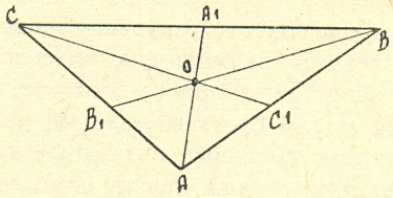
Ova jednakost upoređena sa jednakošću navedenoj u uslovu teoreme daje:

$$\frac{C'_1A}{C'_1B} = \frac{C_1A}{C_1B}.$$

Prema tome, tačke C_1' i C_1 se poklapaju, a samim tim i teorema je dokazana.



Sl. 6.



Sl. 7.

Ako bi prave AA_1 i BB_1 bile paralelne, to bi prava CC_1 bila paralelna ovim dvjema pravama, pa bi te tri prave trebalo posmatrati kao prave koje se sijeku u jednoj istoj tački, koja se nalazi u ∞.

Ovom teoremom možemo se dakle poslužiti pri dokazivanju nama već poznatih teorema.

1. Težišne linije trougla sijeku se u istoj tački.
2. Simetrale uglova trougla sijeku se u istoj tački.

Cevina teorema može se izreći i ovako:

»Prave koje prolaze kroz tjemena trougla i kroz jednu tačku O obrazuju na stranama šest otsječaka, tako da je proizvod triju neuzastopnih otsječaka jednak proizvodu ostala tri.«

Uzmimo u trouglu ABC tačku O (sl. 7.). Postavimo kroz svako tjeme i tačku O prave do presjeka s naspramnim stranama.

Treba dokazati da je:

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = BC_1 \cdot AB_1 \cdot CA_1.$$

U svrhu dokaza kroz A_1 postavimo $A_1D \parallel BB_1$ i $A_1E \parallel CC_1$. (sl. 6).

Iz trouglova: $\triangle AEA_1$ i $\triangle AA_1D$ slijedi:

$$AC_1 : C_1E = AO : OA_1 \text{ i } AB_1 : B_1D = AO : OA_1.$$

Poslednja dva odnosa daju: $AC_1 : C_1E = AB_1 : B_1D$ (1)

Dalje je iz $\triangle C_1BC$: $C_1E : BC_1 = CA_1 : BC$ ... (2), a

iz $\triangle B_1BC$: $BA_1 : BC = B_1D : CB_1$ ... (3).

Množenjem (1) · (2) · (3) dobijamo:

$$(AC_1 \cdot C_1E \cdot BA_1) : (C_1E \cdot BC_1 \cdot BC) = (AB_1 \cdot CA_1 \cdot B_1D) : (B_1D \cdot BC \cdot CB_1)$$

ili $$(AC_1 \cdot BA_1) : (BC_1 \cdot BC) = (AB_1 \cdot CA_1) : (BC \cdot CB_1)$$

ili $$AC_1 \cdot BA_1 \cdot BC \cdot CB_1 = BC_1 \cdot BC \cdot AB_1 \cdot CA_1$$

t. j. $$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = BC_1 \cdot AB_1 \cdot CA_1.$$

Ako uzmemo da je $C_1B = -BC_1$; $B_1A = -AB_1$ i $A_1C = -CA_1$ onda imamo:

$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = -(C_1B \cdot B_1A \cdot A_1C)$ ili $(AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1) : (C_1B \cdot B_1A \cdot A_1C) = -1$

a ovo nije ništa drugo do relacija (5).

Вилсонова и дифузиона комора

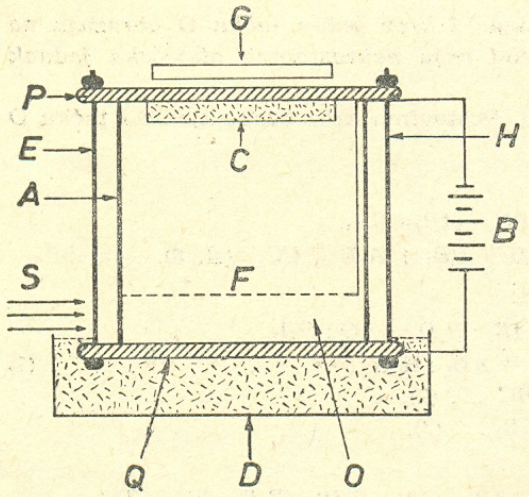
Доц. ОРДАН ПЕЧИЈАРЕ, Скопје

(Свршетак)

Но и покрај големите услуги што ги прави Вилсоновата комора при проучувањето на разни зрачења и јадрени процеси, таа има и свои недостатоци. Главниот недостаток ѝ се состои во тоа, што таа има многу ограничен полезен временски интервал (околу 0,01 до 0,1 сек) и дејствува воглавно само за време кое не е поголемо од еден илјадити дел од времето што е нужно да протекне од една експанзија па дури таа да се спреми за нова идна експанзија. За ова »мртво време« комората не е во состојба да регистрира зрачења што минат низ неа. Со други зборови, ретки појави комората тешко може да ги регистрира поради ова мало полезно време. За отстранување на овој недостаток направено е доста и мртвото време е сведено на минимум, но сепак овој недостаток си останува како нејзин основен недостаток, при се што таа, како што рековме, кога се сврзе во коинциденција со два бројачи, може да регистрира и ретки појави. Овој недостаток е отстранет при таканаречената **дифузиона комора,** сл. 6, која за време на последниве десетина години, после подолго теориско и експериментално испитување, доста се усовршѝ.

Дури при Вилсоновата комора преситената состојба на гасот со пара се добива во целиот работен волумен на комората со адијабатско ширење на гасот и парата содржана во неа, дотука при дифузионата комора преситената состојба на гасот со пара се добива само во еден дел од нејзиниот волумен и тоа по пат на дифузија на парата од едно потопло подрачје во друго поладно подрачје на комората.

Преситената состојба на гасот со пара при Вилсоновата комора трае многу кратко време, воглавно само за време на експанзијата, и оттука таа може да регистрира јонизирашти честици што ѝке минат низ неа воглавно само за тоа кратко време.



Сл. 6. Шема на проста дифузиона комора

При дифузионата комора пак преситената состојба на гасот со пара во една нејзина област врае постојано и оттука во таа област комората е постојано осетлива за јонизираштите честици. Инаку и двете комори работат на ист принцип во поглед на формирањето на трагот на јонизираштите честици, т. е. нивното регистрирање.

Потребните услови за работа на оваа комора можат да бидат остварени при различна техничка конструкција. Една од нејзините најпрости конструкции е дадена шематски на сл. 6. Во најпроста форма таа се состои од еден стаклен цилиндер **A** затворен од двете страни со метални плочи **P** и **Q**. За да биде комората што подобро затворена, двете метални плочи **P** и **Q** не лежат директно на стаклениот цилиндер, туку се опираат на него преку гумени прстени. Со помошта пак на металните прачки **E** и **H**, кои имаат винтови на горните страни, двете плочи добро се стегнуваат за стаклениот цилиндер.

Во нашиов случај прачките се изолирани од едната плоча, т. е. не се во електропроводна врска со неа. Ова е потребно за да може на плочите да им се даде различен напон, кога се сака да се се создаде електрично поле во комората за чистење на »старите јони«.

Под горната плоча се наѓува резервуарот C наполнет со течноста што 'ке испарува, на пример со изоамил алкохол. Над истата плоча се поставува една електрична грејалка G, која 'ке ја загрее плочата до нужната температура, околу 90° C, и 'ке ја одржува на истата температура дури комората работи.

Долната плоча Q е сместена во еден сад D, наполнет со мраз измешан со готварска сол, за да се одржава на што пониска температура. На овој начин се создава потребната температурна разлика ме'гу горната и долната плоча, потребна за функционирање на комората.

Ако ладењето на долната плоча се врши со сув лед (јаглероден двооксид во тврда состојба), тогаш не е потребно горнита плоча да се грее, бидеј'ки сувиот лед толку 'ке ја разради долната плоча, да и без греење на горната плоча ме'гу нив 'ке се создаде потребната температурна разлика за фуфнкционирање на комората. Во овој случај најчесто како течност што 'ке испарува во комората се зема метил алкохол, етил алкохол или пропил алкохол.

За отстранување на старите јони и овде, како и при Вилсоновата комора, се создава електрично поле. За таа цел најпросто е да се сврзат двете плочи со една батерија B од неколку стотини волти или пак долната плоча и еден метален прстен F поставен на неколку сантиметри над дното на комората.

Осветлувањето на осетливста област O на комората се врши отстрана, со паралелниот светлински сноп S, а набљудувањето на траговите преку зидовите на комората или одозгора, ако на плочата P се направи стаклено прозорче.

За ставување на дифузионата комора во дејство достаточно е да се наполни резервуарот C со употребуваната течност, да се загрее горната плоча до потребната температура и стави долната плоча во лед измешан со сол. Течноста тогаш одма почнува да испарува и парата, дифундирај'ки низ воздухот на комората од резервуарот C на кон долната плоча, мине низ воздушни слоеви што се с'е поладни и поладни.

Воздушните слоеви во непосредната близина до резервуарот се заситени со пара. Подолните слоеви пак, ако е комората очистена од разни прашинки или слични честици што можат да послужат како центри за кондензација, 'ке бидат се' пове'ке и пове'ке заситени, т. е. преситени, поради постојаниот температурен над надолу, и тоа дотолку пове'ке преситени доколку се поблизу до долната ладна плоча бидеј'ки низ сите слоеви мине истото количество пара од течноста што испарува од резервуарот. На овој начин парата дифундирај'ки кон дното, толку многу 'ке ја пресити најладната област во неговата близина, што во неа 'ке се создадат услови за кондензација на парата и на јони. Оваа област над дното, која обично е висока неколку сантиметри и е постојано осетлива за јонизираштите зрачења, се вика осетлива област на дифузионата комора.

Во оваа постојано осетлива област на дифузионата комора, формирањето на траговите станува по истиот начин како и при Вилсоновата комора.

Ако пак во комората има прашинки или други слични честици што можат да послужат како центри за кондензација, тогаш кондензација на парата 'ке настане уште во првите преситени воздушни слоеви и приловот на напара во сите слоеви нема да биде ист, па спрема тоа и преситеноста на воздушните слоеви нема да расте одозгора надолу онака како што би растела кога би немало кондензација. Од ваков вид центри на кондензација комората брзо се ослободува после кратко работење, бидеј'ки тие, заедно со формираните капкици на нив, па'гаат на дното

на комората, како што беше случај при Вилсоновата комора. После тоа како цен три за кондензација се јавуваат само јоните и комората може да ги открива траговите на јонизираштите честици што 'ке влезат во нејзиниот осетлив слој.

Со својата релативно проста конструкција дифузионата комора може да стане достапна и на нашите средни школи и на тој начин да се овозможи и нагледно изучавање на некои појави од областа на атомистиката. Од оваа гледна точка пак дифузионата комора претставува специјален интерес и за нашите школи.

Određivanje ekstremnih vrednosti nekih funkcija bez korišćenja izvoda

NIKOLA LJ. ĆIRIĆ, Pirot

Ekstremne vrednosti izvesnih funkcija, na koje se svodi rešavanje nekog problema, mogu se odrediti i bez poznavanja njihovih izvoda. S obzirom da je u velikom delu naše zemlje izučavanje izvoda ograničeno programom samo na kvadratnu funkciju, to je izbor problema koji se svode na traženje ekstremnih vrednosti funkcija veoma skučen. S druge strane primena metode koju ćemo ovde izložiti veoma je jednostavna i sama za sebe interesantna.

A) Aritmetička sredina pozitivnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ veća je ili jednaka (ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$) geometriskoj sredini tih brojeva, tj.

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} \tag{1}$$

Dokaz. Ako su a_1 i a_2 dva pozitivna broja onda je, kako znamo

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 \cdot a_2} \tag{2}$$

Ako su a_1, a_2, a_3, a_4 četiri pozitivna broja onda je, na osnovu (2)

$$a_1 + a_2 \geqslant 2\sqrt{a_1 \cdot a_2}, \qquad a_3 + a_4 \geqslant 2\sqrt{a_3 \cdot a_4}.$$

Sabiranjem poslednjih nejednakosti imaćemo da je

$$a_1 + a_2 + a_2 + a_4 \geqslant 2\sqrt{a_1 \cdot a_2} + 2\sqrt{a_3 \cdot a_4} \geqslant 2\sqrt{2\sqrt{a_1 \cdot a_2} \cdot 2\sqrt{a_3 \cdot a_4}}$$

ili

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geqslant \sqrt[4]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4}.$$

Sada je lako pokazati tačnost nejednakosti (1) za 8, 16, 32, ..., uopšte za 2^n datih pozitivnih brojeva.

Pretpostavimo da je broj datih pozitivnih brojeva $n = 5$. Njihovom zbiru S_5 dodajmo tri jednaka broja $S_{5/5}$. Na taj način imaćemo osam brojeva, dakle, broj brojeva biće jednak najbližem stepenu broja 2, pa je na osnovu prethodnog

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + S_{5/5} + S_{5/5} + S_{5/5}}{8}\right)^8 \geqslant a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot S_{5/5} \cdot S_{5/5} \cdot S_{5/5},$$

$$\left(\frac{S_5}{5}\right)^5 \geqslant a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5, \qquad \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} \geqslant \sqrt[5]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5}.$$

Posle ovoga ostavljamo čitaocu da izvede zaključak da će nejednakost (1) važiti za svaki prirodni broj n.

B) Ako je S dati zbir n pozitivnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$, onda će proizvod

$$a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \ldots a_n^{k_n} \tag{3}$$

imati maksimalnu vrednost ako je

$$\frac{a_1}{k_1} = \frac{a_2}{k_2} = \ldots = \frac{a_n}{k_n}, \tag{4}$$

gde su $k_1, k_2, \ldots, k_n$ dati pozitivni racionalni brojevi.

Dokaz. 1. Neka su najpre $k_1, k_2, \ldots, k_n$ prirodni brojevi. Posmatrajmo brojeve $\frac{a_1}{k_1}, \frac{a_2}{k_2}, \ldots, \frac{a_n}{k_n}$, pa svaki od njih uzmimo respektivno $k_1, k_2, \ldots, k_n$ puta. Na taj način imaćemo $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ brojeva oblika $\frac{a_i}{k_i}$, tj.

$$\underbrace{\frac{a_1}{k_1}, \ldots, \frac{a_1}{k_1}}_{k_1 \text{ puta}}; \quad \underbrace{\frac{a_2}{k_2}, \ldots, \frac{a_2}{k_2}}_{k_2 \text{ puta}}; \ldots; \quad \underbrace{\frac{a_n}{k_n}, \ldots, \frac{a_n}{k_n}}_{k_n \text{ puta}}$$

Obeležimo sa S zbir ovih brojeva, tj.

$$S = k_1 \cdot \frac{a_1}{k_1} + k_2 \cdot \frac{a_2}{k_2} + \cdots + k_n \cdot \frac{a_n}{k_n} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Na osnovu nejednakosti (1) može se napisati

$$\sqrt[k_1+k_2+\cdots+k_n]{\underbrace{\frac{a_1}{k_1} \cdots \frac{a_1}{k_1}}_{k_1 \text{ puta}} \cdot \underbrace{\frac{a_2}{k_2} \cdots \frac{a_2}{k_2}}_{k_2 \text{ puta}} \cdots \underbrace{\frac{a_n}{k_n} \cdots \frac{a_n}{k_n}}_{k_n \text{ puta}}} \leqslant \frac{\underbrace{\frac{a_1}{k_1} + \cdots + \frac{a_1}{k_1}}_{k_1} + \underbrace{\frac{a_2}{k_2} + \cdots + \frac{a_2}{k_2}}_{k_2} + \cdots + \underbrace{\frac{a_n}{k_n} + \cdots + \frac{a_n}{k_n}}_{k_n}}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}$$

$$\sqrt[k_1+k_2+\cdots+k_n]{\frac{{a_1}^{k_1} \cdot {a_2}^{k_2} \ldots {a_n}^{k_n}}{{k_1}^{k_1} \cdot {k_2}^{k_2} \ldots {k_n}^{k_n}}} \leqslant \frac{S}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}$$

posle stepenovanja sa $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ i množenja sa ${k_1}^{k_1} \cdot {k_2}^{k_2} \cdots {k_n}^{k_n}$ dobićemo nejednakost

$$a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \cdots a^{k_n} \leqslant \frac{{k_1}^{k_1} \cdot {k_2}^{k_2} \cdots {k_n}^{k_n}}{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)^{k_1+k_2+\cdots+k_n}} \cdot S^{k_1+k_2+\cdots+k_n}. \qquad (5)$$

Leva strana će imati maksimalnu vrednost ako bude jednaka desnoj, tj. ako je

$$a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n} \cdot (k_1 + k_2 + \cdots + k_n)^{k_1+k_2+\cdots+k_n} = {k_1}^{k_1} \cdot {k_2}^{k_2} \cdots {k_n}^{k_n} \cdot S^{k_1+k_2+\cdots+k_n} \qquad (6)$$

Jednakost (6) je zadovoljena za $a_1 = \lambda k_1$, $a_2 = \lambda k_2, \ldots, a_n = \lambda k_n$, jer je tada

$$(\lambda k_1)^{k_1} (\lambda k_2)^{k_2} \cdots (\lambda k_n)^{k_n} \cdot (k_1 + k_2 + \cdots + k_n)^{k_1+k_2+\cdots+k_n} =$$
$$= {k_1}^{k_1} \cdot {k_2}^{k_2} \cdots {k_n}^{k_n} \cdot (\lambda k_1 + \lambda k_2 + \cdots + \lambda k_n)^{k_1+k_2+\cdots+k_n},$$

$$\lambda^{k_1+k_2+\cdots+k_n} \cdot {k_1}^{k_1} \cdot {k_2}^{k_2} \cdots {k_n}^{k_n} \cdot (k_1 + k_2 + \cdots + k_n)^{k_1+k_2+\cdots+k_n} =$$
$$= {k_1}^{k_1} \cdot {k_2}^{k_2} \cdots {k_n}^{k_n} \cdot \lambda^{k_1+k_2+\cdots+k_n} \cdot (k_1 + k_2 + \cdots + k_n)^{k_1+k_2+\cdots+k_n}.$$

Dakle, proizvod (3) imaće maksimalnu vrednost ako je $a_1 = \lambda k_1, \ldots, a_n = \lambda k_n$, ili $\frac{a_1}{k_1} = \frac{a_2}{k_2} = \cdots = \frac{a_n}{k_n} = \lambda$, tj. ako je ispunjen uslov (4).

2. Neka su $k_1, k_2, \ldots, k_n$ razlomci, tj. $k_1 = \frac{p_1}{h_1}, \ldots, k_n = \frac{p_n}{h_n}$ i neka je najmanji zajednički sadržalac imenioca $h_1, h_2, \ldots, h_n$ broj N i $d_1 = \frac{N}{h_1}$, $d_2 = \frac{N}{h_2}, \ldots, d_n = \frac{N}{h_n}$.

Tada je

$$a_1^{\frac{p_1}{h_1}} \cdot a_2^{\frac{p_2}{h_2}} \cdots a_n^{\frac{p_n}{h_n}} = a_1^{\frac{p_1 d_1}{N}} \cdot a_2^{\frac{p_2 d_2}{N}} \cdots a_n^{\frac{p_n d_n}{N}} = \sqrt[N]{a_1^{p_1 d_1} \cdot a_2^{p_2 d_2} \cdots a_n^{p_n d_n}}.$$

Radikand će biti maksimalan ako je

$$\frac{a_1}{p_1 d_1} = \frac{a_2}{p_2 d_2} = \cdots = \frac{a_n}{p_n d_n} = \lambda$$

ili posle deobe sa N

$$\frac{a_1}{(P_1/h_1)} = \frac{a_2}{(P_2/h_2)} = \cdots = \frac{a_n}{(p_n/h_n)},$$

što je i trebalo dokazati.

Posledica I. Ako je $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 1$ onda će za dati zbir $a_1 + a_2 + a_n$ proizvod $a_1 \cdot a_2 \ldots . a_n$ imati maksimalnu vrednost ako su brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jednaki, tj. ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Posledica II. Napišimo nejednakost (5) u obliku

$$S^{k_1+k_2+\cdots+k_n} \geqslant \frac{a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n} \cdot (k_1 + k_2 + \cdots + k_n)^{k_1+k_2+\cdots+k_n}}{k_1^{k_1} \cdot k^{k_2} \cdots k_n^{k_n}},$$

pa izvučimo koren $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ iz leve i desne strane. Dobićemo

$$S \geqslant (k_1 + k_2 + \cdots + k_n) \cdot \left(\frac{a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}}{k_1^{k_1} \cdot k_2^{k_2} \cdots k_n^{k_n}} \right)^{\frac{1}{k_1+k_2+\cdots+k_n}}. \tag{7}$$

Pod uslovom (4), tj. ako je $a_1 = \lambda k_1, \ldots, a_n = \lambda k_n$, nejednakost (7) prelazi u jednakost što se lako može proveriti.

Prema tome, pod uslovom (4) za dati proizvod $a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}$ zbir $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ uzima minimalnu vrednost.

C) Kada je dat zbir promenljivih veličina $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pa se posmatrani problem svodi na funkciju oblika $y = x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$, gde su $k_1, k_2, \ldots, k_n$ pozitivni racionalni brojevi, čija se maksimalna vrednost traži, onda se na osnovu (3) i (4) odmah dolazi do rešenja. Naime, da bi ova funkcija imala maksimum treba da je $x_1/k_1 = x_2/k_2 = \cdots = x_n/k_n$.

Obrnuto, ako je dat proizvod $x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$, gde su $k_1, k_2, \ldots, k_n$ pozitivni racionalni brojevi, pa se problem svodi na funkciju oblika $y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, onda će ova funkcija imati minimum ako je $x_1/k_1 = x_2/k_2 = \cdots = x_n/k_n$.

Primjer 1. Od žice dužine $2l$ treba načiniti pravougaonik maksimalne površine.

Ako su strane pravougaonika x i y onda je $x + y = l$ a površina $z = x \cdot y$. Ova funkcija ima maksimum ako je $x = y = l/2$. Dakle, to je kvadrat.

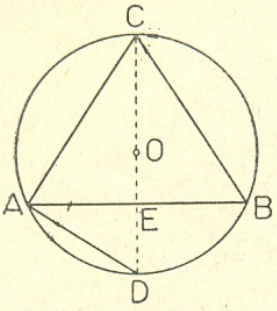
Obrnuto, od svih pravougaonika date površine P naći onaj, čiji je obim najmanji.

Na osnovu posl. II izlazi da će funkcija $z = x + y$ za $x \cdot y = P$ imati minimum ako je $x = y$. Dakle to je kvadrat.

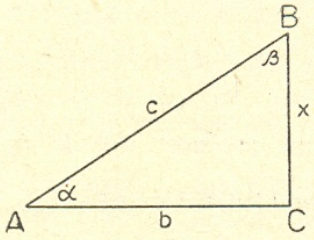
Primjer 2. U lopti datog poluprečnika R upisati kupu maksimalne zapremine.

Ako poluprečnik osnove kupe AE (sl. 1) označimo sa x njenu visinu sa z, onda je

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 z.$$



Sl. 1.



Sl. 2.

Iz ΔADC je $z : x = x : (2R - z)$, pa je

$$V = \frac{1}{3} \pi z^2 (2R - z).$$

Zapremina kupe će biti minimalna, pošto je $z + (2R - z) = 2R = \text{const.}$, ako proizvod $z^2 \cdot (2R - z)$ ima maksimalnu vrednost. Dakle, treba da je

$$z/2 = (2R - z)/1 \quad \text{ili} \quad z = 4R/3.$$

Primer 3. Zbir katete i hipotenuze pravouglog trougla je m. Dokazati da će površina ovog trougla biti maksimalna ako je ugao između hipotenuze i ove katete 60°.

Neka je $c + x = m$ (sl. 2). Tada je $AC = \sqrt{m^2 - 2mx}$, a površina trougla

$$P = \frac{1}{2} x \sqrt{m^2 - 2mx} = \frac{1}{4m} \cdot (2mx)\,(m^2 - 2mx)^{\frac{1}{2}}.$$

Kako je $2mx + (m^2 - 2mx) = m^2$, to će površina trougla biti maksimalna ako je

$$2mx : 1 = (m^2 - 2mx) : 1/2$$

tj. ako je $x = m/3$. Tada je $\sin\alpha = 1/2$, dakle $\beta = 60°$.

Primer 4. Električna sijalica visi iznad tačke M koja je u horizontalnoj ravnini α. Kolika treba da bude visina sijalice iznad ravni da bi u tački K te ravni, udaljenoj za d od tačke M, osvetljenost bila najjača?

Za argument uzmimo ugao φ između svetlosnog zraka SK i ravni α (sl. 3). Kao što je poznato osvetljenost I je direktno proporcionalna $sin\,\varphi$ a obrnuto kvadratu rastojanja SK, tj. $I = c\,(sin\,\varphi/\overline{SK}^2)$, gde je c koeficijenat koji zavisi od jačine sijalice. Pošto je iz ΔMSK $KS = a/cos\,\varphi$, to je

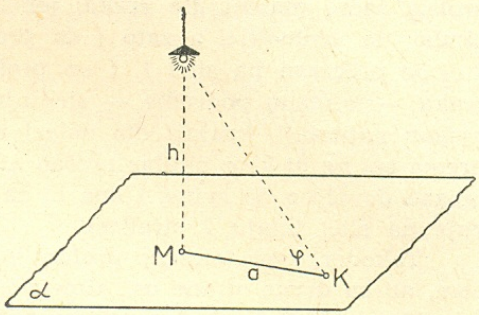
$$I = \frac{c}{a^2} \cdot cos^2\varphi \cdot sin\,\varphi = \frac{c}{a^2} \cdot cos^2\varphi \cdot (sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}.$$

Kako je $cos^2\varphi + sin^2\varphi = 1$, to će osvetljenost I biti maksimalna u tački K ako je

$$\frac{cos^2\varphi}{1} = \frac{sin^2\varphi}{1/2} \qquad \text{ili}$$

$$2\,sin^2\varphi - cos^2\varphi = 0\,.$$

Iz poslednje jednakosti je $tg\,\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pa je tražena visina $SM = h = a \cdot tg\,\varphi = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Sl. 3.

D) Primeniti ovu metodu na sledećim primerima.

1. U datoj kupi upisati valjak maksimalne zapremine.
2. Od kartona kvadratnog oblika strane a treba iseći na ćoškovima jednake kvadrate tako da se sklapanjem preostalog dela dobije kutija maksimalne zapremine.
3. U lopti poluprečnika R upisati valjak čiji omotač ima maksimalnu površinu.
4. Presek zatvorenog kanala ima oblik pravougaonika nad čijom dužom stranom stoji polukrug. Obim tog preseka je dat (treba utrošiti predviđenu količinu cementa). Kolike treba da budu dimenzije preseka (poluprečnik R i visina pravougaonika H) da bi kanal propuštao najveću količinu vode?

Vidno polje dalekozora i njegovo iskorišćenje

VLADIS VUJNOVIĆ, Zagreb

U osnovnom prilaženju geometrijskoj optici govori se — poslije tumačenja svojstava zrcala i leća — o optičkim instrumentima. Među njima i o teleskopima. Opisuje se nekoliko tipičnih predstavnika teleskopa s lećama i teleskopa s zrcalima, objašnjavajući njihovu građu i nastajanje slike.

Princip rada instrumenata iz toga je posve jasan. Međutim, moguće je izvesti dalekozore koji grade sliku na veoma raznolike načine, s različitim međusobnim smještajem leća i zrcala, ne samo sa objektivom i okularom, već i sa pomoćnim lećama i zrcalima. Zašto, ipak, postoji razlika u primjeni, zašto su prihvaćeni samo neki oblici dalekozora, samo nekoliko tipova? Zar ispravan princip rada nije dovoljan zalog za gradnju svih mogućih tipova i kombinacija, koje se samo mogu zamisliti?

Može se reći: ono, što se u osnovnom kursu izlaže, nije dovoljno, da bi se potvrdila upotrebljivost instrumenata. Osim sposobnosti davanja slike potrebni su i drugi kriteriji za ocjenu vrijednosti instrumenta (to vrijedi za sve optičke instrumente, ne samo za teleskope).

Jedan od bitnih kriterija je veličina vidnog polja, a zatim i njegovo iskorišćenje.

Koliki se dio okoline može kroz dalekozor gledati, t. j. koliko je vidno polje — ovisi o razmještaju propusnih otvora — zaslona. Zasloni su prije svega objektiv i okular. Promatrajući zrake koje mogu da prođu kroz njih nalazimo vidno polje teleskopa.

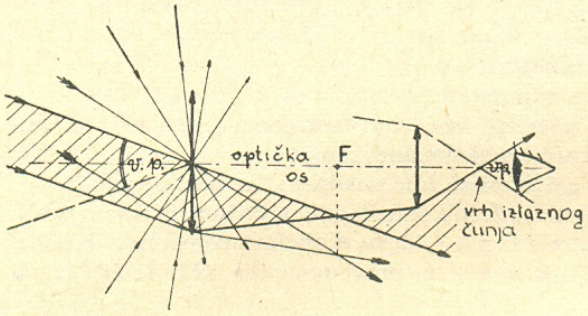
Koliko je jednostavna, toliko je i važna spoznaja, da nijedna zraka ne dolazi u okular, ne prošavši kroz objektiv. No, u objektiv mogu ući sve zrake iz prostora

pred njim: ulazeći kroz središte leće ne lome se i šire se isto tako u čitav prostor unutrašnjosti teleskopa (slika 1.).

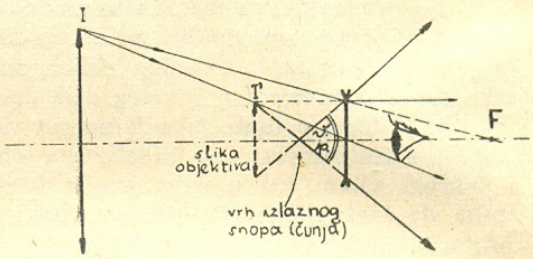
Ali, isto tako ne ćemo vidjeti ni jednu zraku, koju gledamo kroz teleskop, ako nije prošla i kroz okular: tek objektiv i okular zajedno čine teleskop! Kroz okular prolazi samo maleni dio zraka, jer uslijed razmještaja objektiva i okulara može okular da »dohvati«, a zato i da prođe kroza nj, još onaj paralelan snop zraka, koji je prikazan na slici 1. I on prolazi samo djelomično. (Upadni paralelan snop zraka — iscrtano područje — sjedinjuje se u žarišnoj ravnini objektiva: još samo njegov najmanji, krajnji dio dolazi u okular). Upadnom snopu pod većim kutem prema osi ne bi kroz okular prošao ni najmanji dio — krajnju zraku ne bi objektiv mogao dovoljno da svine, i ona bi za nas bila izgubljena (to je slučaj sa zrakama, koje na slici imaju 2 strelice).

Također, kroz teleskop prolazi još krajnji dio onog snopa, koji pod istim nagibom, ali sa druge strane osi, simetrično, pada na objektiv (crtkana zraka).

Kutem između ta dva smjera određeno je vidno polje dalekozora (na sl.: v. p.).



Sl. 1.



Sl. 2.

Gornje razmatranje se može ovako sažeti: ništa nije izašlo kroz teleskop, ništa se u teleskopu ne može promatrati, što nije ušlo u objektiv i što — izlazeći iz objektiva — nije ušlo u okular. Zato svakom dalekozoru, zbog razmještaja objektiva i okulara i zbog njihove veličine, odgovara određeno vidno polje.

Veličina vidnog polja je jedan od kriterija za vrijednost optičkog instrumenta. Galilejev teleskop ima skoro jednako vidno polje kao i Keplerov. Međutim, sada stupa na snagu drugi uvjet: iskorišćenje vidnog polja. Kod Galilejevog teleskopa iskorišćenje vidnog polja je mnogo manje nego kod Keplerovog. Što znači »iskorišćenje«? Iz dalekozora izlazi snop zraka u obliku čunja (»izlazna pupila«), u koji se zbog promatranja stavlja oko (vidi sl. 1.). Krajnje zrake tog čunja nastaju od krajnjih zraka čunja na ulazu u objektiv, kojim je određeno vidno polje, pa izlazni čunj predstavlja vidno polje, kako se vidi kroz teleskop.

Iskorišćenje vidnog polja sada znači to, da li je oku moguće sakupiti sve zrake izlaznog snopa, ili samo manji dio snopa. U prvom slučaju vidno polje će biti posve iskorišćeno, u drugom samo djelomice.

Pokazat ćemo to na konkretnom primjeru, na Galilejevom teleskopu, gdje je iskorišćenje djelomično.

Nacrtajmo raspored objektiva i okulara (slika 2.). Okular je rasipna leća, čiji se fokus nalazi u fokusu objektiva. Treba naći kako izgleda vidno polje promatrano kroz teleskop, t. j. naći izlazni snop zraka. U tu svrhu možemo tražiti zraku, koja ulazi u objektiv tako, da još jedva dotiče jedan kraj okulara — kao što smo počeli na sl. 1. No mi ćemo ići jednostavnijim putem, ako shvatimo objektiv kao predmet, od kojega okular stvara sliku. Svako mjesto na površini objektiva preslikat će se u neko mjesto na slici. Zrake, koje ulaze u objektiv na bilo kojem mjestu, morati će prolaziti i kroz neko mjesto u slici objektiva. Što nije prošlo kroz objektiv, što se ne nalazi u slici objektiva, ne će se moći vidjeti ni pomoću čitavog teleskopa!

Objektiv nam je sada predmet, od kojega okular pravi sliku. Nađimo, gdje je slika točke *I*. Za to je potrebno konstruirati zraku od *I* kroz središte okulara — ta se zraka ne lomi — i zraku, koja bi prošla kroz fokus okulara — ta se lomi paralelno sa optičkom osi. Slika *I'* je na presjecištu tih zraka, odnosno produženju zrake unatrag. Suprotna strana objektiva preslika se u drugu stranu slike simetrično, pa se čitava slika objektiva može odmah narisati.

Sad narišimo zrake sa dvije strelice, koje zbog rasipnog svojstva okulara izlaze iz krajeva slike objektiva tako, da se ukrštavaju. Sve što se između njih nalazi prošlo je kroz sliku objektiva, a prema tome i kroz sam objektiv — a zatim i kroz okular. Sve se to nalazi u vidnom polju i određuje ga. To i jeste vidno polje.

Gledajući u okular ne vidi se slika objektiva, jer je objektiv izrađen od providnog stakla — vidi se samo rub slike. To je tamno područje, iz kojega ništa svijetla ne dolazi. Čini nam se, da vidimo samo jedan otvor, u kojemu razabiremo predmete u prirodi — jer svijetlo i dolazi samo kroz objektiv.

Oko će iskoristiti vidno polje onda, ako sakupi njegove krajnje zrake. Kod Galilejevog teleskopa oko ne može sakupiti krajnje zrake, jer mu priječi okular; ne možemo ga staviti u tubus dalekozora, gdje se nalazi vrh, šiljak izlaznog snopa. To nije samo mehanička teškoća — skraćivanjem tubusa ne bi se promijenilo svojstvo izlaznog čunja da mu je vrh u unutrašnjosti. To svojstvo proističe iz baš takve konstrukcije slike, baš iz principa Galilejevog teleskopa.

Kod Keplerovog teleskopa, kojemu je i okular sabirna leća, vrh izlaznog čunja nalazi se izvan tubusa, pa oko može posve iskoristiti veličinu vidnog polja (v. sl. 1.).

U historiji su predlagani razni oblici dalekozora. Desetke godina prije no što je Newton izradio zrcalni teleskop, a nedugo po otkrivanju dalekozora sa lećama, predložio je Mersenne zrcalni teleskop, kojemu je ne samo objektiv, već i okular, bio predstavljen udubljenim zrcalima (sfernim). Njegov teleskop je ustvari Keplerov, samo umjesto leća dolaze zrcala. Princip je isti. Ako s desne strane dolaze zrake svijetla i padaju na veliko udubljeno zrcalo-objektiv, zrake se odbijaju na desno i skupljaju u fokusu, a zatim, šireći se padaju na malo udubljeno zrcalo-okular. To zrcalo sada odbija paralelan snop zraka ulijevo gdje bi one opet pale na objektiv, da u njemu, u njegovu središtu, nije provrtan otvor kuda zrake izlaze da bi ih se moglo promatrati. Nacrtavši sliku i pronašavši vidno polje, koje je jednako veliko kao i kod Keplerova teleskopa, dolazi se do rezultata, da se kroz otvor u velikom zrcalu može vidjeti neznatan dio vidnog polja. Čemu će nam veliko vidno polje, kad ga ne možemo iskoristiti?! Zato taj teleskop nije nikada ostvaren.

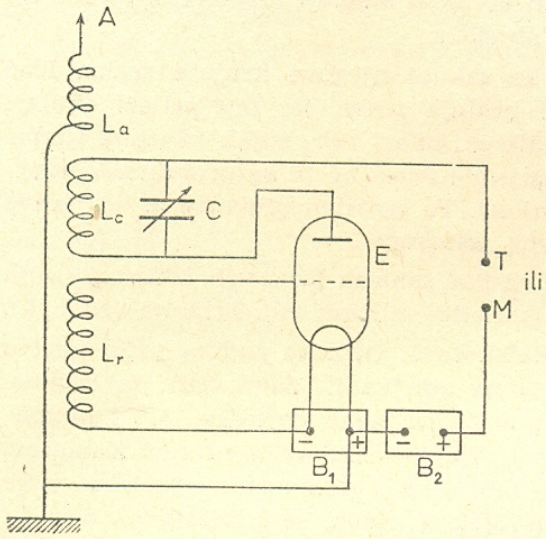
Iz sadašnjeg položaja ne čini nam se značajnim pronaći princip rada teleskopa i provjeriti ga raznim kriterijima. Međutim, u historiji je korisnost djela provjeravala dugogodišnja praksa, jedan pokušaj poslije drugoga. Što više, i princip rada dalekozora, konstrukcija slike — što nam se sada čini osnovom za svaki dalji rad — nije u vrijeme stvaranja dalekozora bila poznata. Tada nije bio poznat točno ni indeks loma stakla, ni zakon loma, ni jednadžba za tanku leću — skoro ništa od onoga, što u udžbenicima uvjerljivo prethodi optičkim instrumentima. Znajući, da su jedne leće sabirne, a druge rasipne, mogao je praktičar Galilej pokušajima, kombinirajući leće, doći do dalekozora. Put Keplera, genija teoretičara, bio je još mučniji. On je teoretski, crtajući put pojedine zrake kroz objektiv, do okulara, kroz okular, došao do svojstava svog teleskopa. Kako su vrijedna divljenja takva djela, a kako im upotreba i uvođenje u praksu ljudskog društva može biti u znaku pitanja, pokazuje običan kriterij — uspravnost slike: Keplerov teleskop se ne može bez preinaka upotrebljavati za predmet na zemlji, jer je slika obrnuta a ne uspravna! No zato je taj teleskop svoju korisnu primjenu našao tamo, gdje praksa ne postavlja taj kriterij, gdje smjer gore-dolje nije bitan — u astronomiji.

IZ MOJE RADIONICE I LABORATORIJA

Odašiljač ili prijemnik — po želji!

Ovdje dajemo uputu za gradnju jednostavnog jednocijevnog radioaparata, koji se po želji može koristiti ili kao emisiona stanica ili kao prijemna stanica.

Aparat sastavimo prema priloženoj shemi: L_a, L_c i L_r su tri uzvojnice, koje namatamo jednu pokraj druge na kartonskom valjku promjera 6 cm. L_a ima 12 uzvoja lakom izolirane žice promjera 0,7 mm. L_c ima 25 uzvoja lakom izolirane žice promjera 0,45 mm. L_r ima 74 uzvoja lakom izolirane žice promjera 0,45 mm. C je zakretni kondenzator s oko 500 pF maksimalnog kapaciteta. E je bilo kakva izlazna trioda. Izvori napetosti B_1 i B_2 zavise o vrsti upotrebljene triode.



Na mjestu T ili M uključimo slušalice T, ako aparat želimo upotrebiti kao prijemnik, ili uključimo ugljeni mikrofon M, ako aparat želimo upotrebiti kao odašiljač.

Napomena: I slušalice mogu poslužiti kao mikrofon. Možemo na pr. upotrebiti radio slušalice, pa jednu od njih staviti na uho, a drugu pred usta umjesto mikrofona.

Pokusi.

1. Sa slušalicom na uhu polagano zakrećemo dugme kondenzatora, dok ne čujemo glasno emisiju neke vanjske radio stanice.

2. Uključimo industrijski radio aparat, pa ga namjestimo na istu vanjsku stanicu, koju slušamo u našem aparatu. Govorimo u mikrofon, pa će se u industrijskom radio aparatu čuti uz prijem vanjske stanice i naš govor.

3. Dugme za reguliranje stanica na industrijskom aparatu zakrenimo u položaj, u kome više ne čujemo vanjsku stanicu. Govorimo u mikrofon našeg aparata i zakretanjem kondenzatora našeg aparata uspostavimo opet rezonanciju s industrijskim radio aparatom. Sad se u industrijskom radio aparatu čuje samo naš govor.

4. Sagradimo li sebi dva ovakva aparata možemo razgovarati sa svojim prijateljem bežičnim putem.

Dragutin Mayer, Zagreb

ZANIMLJIVOSTI I RAZNO

Takmičenje učenika gimnazija NR Srbije

Društvo matematičara i fizičara NRS organizovalo je ove godine takmičenje u rešavanju matematičkih zadataka za učenike svih gimnazija na teritoriji NR Srbije. Ovo takmičenje, prvi put izvedeno u našoj zemlji u ovoj razmeri, imalo je tri stupnja: I. Kvalifikaciono takmičenje u okviru svake škole, održano 15 marta; II. Takmičenje najboljih pretstavnika svih gimnazija u okviru jedne grupe srezova, održano 5 aprila u Beogradu, Novom Sadu, Zrenjaninu, Nišu, Prištini, Kragujevcu, Zaječaru, Titovom Užicu, Svetozarevu, Požarevcu, Aranđelovcu i Šapcu; III. Finalno takmičenje za prvenstvo NR Srbije, održano u Beogradu 26 aprila.

Такмичење је наишло на добар одзив ученика као и наставника математике који су учествовали у организовању истог. На квалификационом такмичењу учествовало је укупно око 2000 ученика у око 70 гимназија; на такмичењу другог ступња било је 422 учесника из 66 гимназија, и на финалном такмичењу било је 109 учесника из 44 гимназије. 6 маја обављена је свечана подела награда, диплома и похвалница најбољим учесницима финалног такмичења. Награде су добили следећи ученици:

За VIII раз. I награда: Обрадовић Душан, уч. XIV београд. гимн. II награда Хрушка Милан, уч. V београд. гимн. III награда: Радовановић Душан, уч. гимн. у Приштини, IV награда: Степановић Радован, Ваљево.

За VII разред. I награда: Кирић Миодраг, II гимн. у Зрењанину; II награда Мојсиловић Предраг, III београд. гимн. III награда: Маринковић Слободан, XIV београд. гимн.

За VI раз. прву, другу и трећу награду деле: Стојаковић Зоран, уч. гимн. »С. Марковић« у Новом Саду, Кузмановић Стеван, уч. XIV београд. гимн. и Марић Небојша, уч. II београд. гимн. IV награда: Данковић Братислав, Пирот.

За V разред додељена је само II награда: Давидовић Драган, Сента.

Осим ових награда додељене су похвалнице и утешне награде у књигама свим учесницима финалног такмичења који су постигли више од 50% могућих поена.

На финалном такмичењу најбољи успех су показали ученици VI разреда, а најслабији ученици V разреда (изгледа, да су њихови задаци били релативно најтежи). У целини узевши, на такмичењу другог и трећег ступња најбољи успех показали су ученици следећих гимназија: XIV београд. II београд. Пирот, III београд. Ниш: »С. Марковић«, Светозарево, Смедерево, II Крагујев. гимн. Вршац итд.

Задаци на финалном делу такмичења

V разред

I. $\frac{m-1}{m-3}x-\frac{m-3}{m-1}x+1=\frac{m-3}{m-1}$.

Решити једначину и затим одредити m да: *a*) решење буде 2, *b*) решење буде позитивно.

II. Неко се одвезе до извесног места брзином 30 km/h а врати се брзином 50 km/h. Која му је средња брзина за цео пут (за одлазак и повратак)?

III. Конструисати паралелограм кад је дата једна страна, њена висина и угао између дијагонала.

IV. У троуглу ABC BD је симетрала $\sphericalangle CBA$. Кругови описани око троуглова BCD и BAD секу страну BC у P и страну AB у Q. Доказати да је $CP = AQ$.

V. Над странама троугла ABC конструисани спољa равностранi троуглови ABC_1, BCA_1 и CAB_1. Доказати да је $AA_1 = BB_1 = CC_1$ и одредити углове које граде те дужи међу собом.

VI разред

I. Решити једначину

$$\frac{a-b+1}{ax+bx}-\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{a-b}{x}.$$

II. Стабло облика правог ваљка плива у води тако да му је једна четвртина пречника ван воде. Наћи његову специфичну тежину.

III. У равни α налази се ромб $ABCD$, чија је страна a и дијагонала $BD=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Из пресека дијагонала O подигнута је нормала на раван α и на њој узета тачка S тако да је: $SB = SD = a$.

a) показати да је $\sphericalangle ASC = 90°$.

b) израчунати површину пирамиде

$ABCDS$.

c) показати да је диједар $BSAD$ чија је ивица AS правоугли.

IV. Дат је круг полупречника R. У том кругу уписан је равностранi троугао ABC и из центра подигнута нормала на раван круга.

a) одредити на нормали тачку K тако да су му дужи KA, KB, KC једнаке странама троугла ABC и израчунати површину и запремину пирамиде $KABC$.

b) ако се тачка T налази на средини дужи OK доказати да је троугао TAB равнокрако-правоугли.

VII разред

I. Ако је $2\,tg\,a = 3\,tg\,b$ показати да је

$$tg\,(a-b)=\frac{tg\,b}{2+3\,tg^2 b}=\frac{sin\,2b}{5-cos\,2b}.$$

II. Решити систем једначина: $x^2 + y = 2$, $y^2 + x = 2$.

III. Из једне тачке M на растојању a и b од две паралелне праве повучене су две, међусобно нормалне, дужи MA и MB до тих правих. Наћи минимум површине троугла AMB.

IV. Решити једначину:

$$\sin^2 x - \sin 2x = 1 - 2\cos x.$$

V. Висина из темена C троугла ABC једнака је збиру друге две висине. Доказати да је:

$$\frac{1}{\sin\gamma} = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}.$$

VIII разред

I. Упростити израз:

$$\sqrt{x\sqrt{y^3\sqrt{x\sqrt{y^3\sqrt{x\sqrt{\ldots}}}}}}$$

II. У правоуглом троуглу, чије стране чине аритметичку прогресију а хипотенузина висина је $h = 4{,}8$, уписан је правоугаоник максималне површине. Наћи однос површина правоугаоника и троугла.

III. $ax^2 + by^2 + c = 0$. За разне вредности a, b и c које све линије претставља ова једначина?

IV. Два праволиниска пута секу се под правим углом. Из места A на првом путу, удаљеног 60 *km* од раскршћа путева, крене камион брзином 30 *km* на час. Истовремено из места B на другом путу, удаљеног 30 *km* од раскршћа, крене други камион брзином 60 *km* на час. Када ће међусобно бити најближи?

V. У тетраедру $ABCD$ мимоилазне ивице су једнаке.

a) Показати да су му стране подударни троуглови.

b) показати да су дужи, које спајају средине једнаких ивица, нормалне са тим ивицама и да се све три секу у истој тачки.

Б. С.

Krožki in tekmovanje mladih matematikov

Tudi letošnje šolsko leto je Društvo matematikov in fizikov LRS priredilo krožke iz matematike za dijake vseh ljubljanskih gimnazij in strokovnih šol. Krožki so se vršili dvakrat tedensko v mesecu novembru in decembru 1958. Na krožkih so bile obdelane sledeče teme: popolna indukcija, metoda nedoločenih koeficientov, linearni program, eksponentna funkcija v matematiki in v fiziki, Evklidev algoritem in verižni ulomki, polarni koordinatni sistem in špirale, kongruenca števil. Vsakemu predavanju so sledile praktične vaje, kjer so dijaki s pomočjo predavatelja vežbali pridobljeno znanje. O letošnjih krožkih smo izdali tudi skripta z izvlečkom predavanj z vajami. Udeležba je bila povprečno 70 dijakov tedensko. Namen teh krožkov pa je bil, da se dijaki polagoma uvajajo v nesrednješolski sistem študija in hkrati seznanjajo s snovjo, ki se na srednji šoli ne obravnava.

Letos smo tudi priredili tečaj iz fizike. Naravoslovna fakulteta v Ljubljani nam je dala na razpolago prostore, kjer so priznani strokovnjaki predavali in s poizkusi utemeljevali razlago raznih pojavov iz področja fizike. Skozi osem tednov so se vrstila sledeča predavanja: o jedrski fiziki, nekaj iz nihanja valovanja in akustike, svetloba je valovanje in elektromagnetna indukcija. Udeležba na tem tečaju je bila izredno velika, in sicer od 150 do preko 300 dijakov tedensko. Namen tečaja pa je bil, pokazati tiste poizkuse, ki jih profesorji na srednji šoli ne morejo izvesti zaradi pomanjkljivih fizikalnih zbirk. Prihodnje leto bo treba ta tečaj ponoviti, ker se je izkazalo da je zanimanje in potreba po takih predavanjih zelo velika.

5. aprila pa smo izvedli tekmovanje dijakov vseh gimnazij in strokovnih šol v Sloveniji. Vsaka šola je poslala najboljše dijake-matematike. Vseh 147 udeležencev smo porazdelili v 9 skupin, kjer so prejeli sledeče teme:

Za I. razred gimn.:

1. Določi koeficienta a in b tako, da bo polinom $ax^5 + bx + 4$ deljiv z izrazom $(x-1)^2$!

2. Avtomobilist, ki se je po eni uri vožnje zamudil 40 minut s popravilom avtomobila in nadaljeval pot le še tričetrtinsko prejšnjo hitrostjo, je prispel v namembeni kraj z dvourno zamudo. Če pa bi se avto pokvaril 80 km dalje od odhodne postaje, bi prispel na cilj pod istimi pogoji z zamudo 1 ure in 40 minut.

Kolika je bila hitrost avtomobila in kako dolga je bila pot?

3. Konstruiraj enakokraki trapez, če je kot med diagonalo in krakom 120^0, osnovnica $a = 7$ cm, krajišči osnovice c pa sta od središča osnovice a oddaljeni po 2,5 cm!

4. Iz lesene krogle s polmerom R izrežeš enakostranični valj (in sicer največjega mogočega). Koliko odstotkov lesa gre v izgubo?

Za II. razred gimn.:

1. Kako se glasi kvadratna enačba, ki ima za korena kvadrat vsote in kvadrat razlike korenov enačbe

$$2x^2 + 2(m + n)x + m^2 + n^2 = 0.$$

2. Število ε ustreza enačbi $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$. Izračunaj y iz enačbe

$$\frac{y-1}{y+1} = \varepsilon \frac{x-i}{x+i}$$

i je tu imaginarna enota, x pa neka konstanta.

3. Pokončna tristranična prizma ima stranske plokve $S_1 = 65$ cm^2, $S_2 = 70$ cm^2 in $S_3 = 75$ cm^2, osnovna ploskev pa meri $O = 64$ cm^2. Nad krogom, ki je včrtan osnovni ploskvi, se dviga poševen valj, katerega stranica meri 15 cm. Izračunaj naklonski kot valjeve stranice, če je višina enaka višini prizme.

4. Trikotniku z osnovnico a in višino v včrtamo pravokotnik tako, da leži ena njegova stranica na osnovnici trikotnika. Izračunaj stranice tega pravokotnika, če znaša njegova ploščina $p\%$ ploščine trikotnika. Koliko % ploščine trikotnika more največ pokriti včrtani pravokotnik?

Za III. razred gimn.:

1. Za katere vrednosti konstante a je sistem neenačb

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$$

izpolnjen pri vseh realnih vrednostih spremenljivke x?

2. V pravilni četverostranični piramidi je kot med sosednjima stranskima ploskvama enak 120^0. Ugotovi, ali leži središče tej piramidi očrtane krogle v notranjosti ali zunaj piramide! Izračunaj naklonski kot stranskega roba proti osnovni ploskvi!

3. Če v enačbi $x^3+ax^2+ax+1=0$ koeficienta a podvojimo, se vsota kvadratov vseh treh korenov poveča za 1. Določi koeficient a in napravi preizkus!

4. Kolika sta ostra kota v pravokotnem trikotniku, v katerem je vsota katet štirikrat večja kakor višina na hipotenuzo?

Za IV. razred gimn.:

1. Razlika med predzadnjim in prvim členom aritmetičnega zaporedja je 24. Vsota vseh členov je 102, diferenca zaporedja pa je trikrat prvi člen. Katero je to zaporedje?

2. Načrtaj na osnovi diagrama kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ diagram funkcije $y = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ za primere, da je $a > 0$ in diskriminanta $D > 0$, nato tudi $D = 0$ in $D < 0$! Izvajanje utemelji! Kako se spremene rezultati če je $a < 0$? (Za načrtovanje si lahko sam izbereš ustrezne posebne vrednosti za koeficiente a, b, c).

3. Osnovna ploskev poševne tristrane prizme z znanim stranskim robom s je trikotnik z znano stranico b in z znanim polmerom r očrtanega kroga. Robovi, ki se stikajo v oglišču A osnovne ploskve, tvorijo enakostrani trirob z znanim kotom α med dvema roboma. Izračunaj prostornino prizme!

4. Katerim pogojem morajo ustrezati koeficienti enačbe krožnice

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

da bo krožnica presekala abscisno os in ordinatno os? Kdaj je koordinatno izhodišče zunaj in kdaj v notranjosti kroga? Zamisli si premičje s središčem v koordinatnem izhodišču! Izračunaj produkt odsekov, ki ju napravi krožnica na vsaki premici premičja, ki jo preseka. Kolik je ta produkt? Kateri izrek si s tem dokazal?

Ocenjevalna komisija je, pod vodstvom univ. prof. dr. Vidava podelila najboljšim tele nagrade:

Ena prva nagrada in sicer Janezu Lesjaku iz III. r. gimn. v Kočevju. Štiri druge nagrade: Borutu Gogali iz III. r. I. gimn. v Ljubljani, Karlu Vukoviču iz II. r. gimn. v Trbovljah, Mladenu Grosu

iz IV. r. IV. gimn. v Ljubljani in Janezu Kramarju iz IV. r. gimn. v Novem Mestu. Pet tretjih nagrad: Valentinu Kalanu iz II. r. gimn. v Kranju, Jožetu Vrabecu iz IV. r. IV. gimn. v Ljubljani, Ranku Todoroviču iz II. r. gimn. v Kranju, Primožu Bradaču iz II. r. I. gimn. v Ljubljani in Egonu Zakrajšku iz III. r. gimn. na Jesenicah.

Razen tega je prejelo 15 udeležencev tekmovanja knjižne nagrade.

Prof. Stanko Uršič

Takmičenje iz matematike za učenike svih razreda gimnazije na teritoriji AKMO

Posle kvalifikacionog takmičenja, koje je održano 15 marta u svim gimnazijama na teritoriji AKMO, održano je Oblasno takmičenje iz matematike za učenike viših razreda gimnazije u Prištini na dan 5 aprila 1959. godine.

Svoje takmičare poslale su gimnazije u Peći (8), Kosovskoj Mitrovici (6), Gnjilanu (4), Prištini (4) i u Đakovici (1), dok gimnazija u Prizrenu nije uputila nijednog takmičara. Komisija, koju su sačinjavali Nedžat Orani, asistent VPŠ u Prištini, Nikola Belocerkovec, profesor gimnazije u Prištini i Šinasi Korenica, nastavnik gimnazije u Kosovskoj Mitrovici, pregledala je radove svih takmičara i konstatovala da su najbolje rezultate postigli sledeći učenici: B. Radanović, učenik IV razreda iz Prištine — 20 poena (od 25 mogućih poena) i učenik IV razreda iz Kosovske Mitrovice M. Behrani — 11 poena, dok je daljnjih 7 takmičara postiglo 1 do 8 poena. 14 učesnika nije postiglo nijedan poen. Po tome se može zaključiti da učenici nisu bili dovoljno pripremljeni za ovo takmičenje.

O. R.

Magnetofon

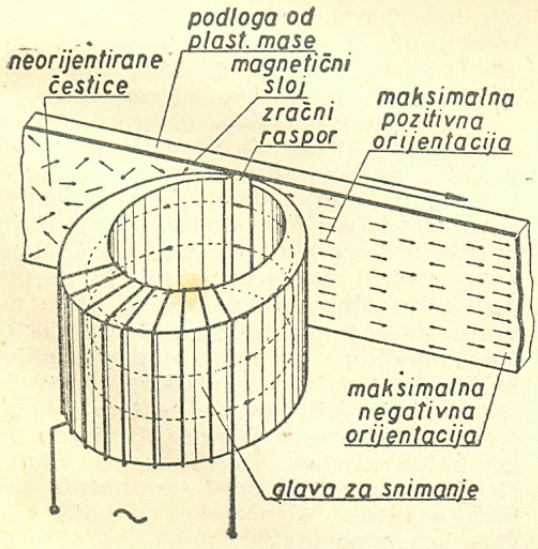
Kad elektromagnetom magnetiziramo komadić čelične, ili neke druge feromagnetične tvari, on se magnetizira jače, ako je struja kroz zavojnicu elektromagneta jača, odnosno slabijom električnom strujom magnetiziramo ga slabije. Prema tome taj magnetizirani komadić možemo smatrati magnetskom slikom jačine struje, koja ga je magnetizirala. Ako pak približimo istom brzinom jači, pa zatim slabiji magnet istoj zavojnici, onaj jači inducirat će jači strujni impuls od onog slabijeg. Magnetska slika pretvorila se u električnu.

Danac *Valdemar Poulsen* još godine 1898. zamislio je na gore opisanom principu spravu, koja magnetski zapisuje električne promjene, a ta magnetska »slika« se može opet pretvoriti u onakve iste električne promjene, koje su je izazvale. Odlična zamisao, ali zašto smo čekali pedesetak godina na današnji prikladni oblik magnetofona, sprave, koja bilježi i reproducira glazbu, govor, a i drugo što joj poslužimo u obliku promjenljive električne struje? Bilo je to doba, kad se, možemo reći, još nije znalo za elektroniku. Fonograf, kasniji gramofon, davao je za onda odličnu i jaku reprodukciju glazbe i govora, no kako pojačati slabe električne impulse dobivene iz magnetske »slike«? Elektronika se razvijala, a tehnolozi su stalno poboljšavali elektromagnetski materijal, pa je od prvih nezgrapnih magnetofona iz godine 1935. nastao naš omiljeni znanac. Mnogi su mu svojim znanjem, spretnim i sretnim rješenjima pomogli k današnjem prikladnom obliku, a iz dana u dan ga dotjeruju i poboljšavaju.

Neće nam biti teško da si predočimo kako radi magnetofon. Najprije ćemo nabrojiti njegove glavne djelove. Na *magnetofonsku vrpcu* zapisujemo naše »slike«, sa nje ih opet reproduciramo. Danas najveći broj magnetofona snima na vrpcu, koja je iz plastične tvari, slično kao i filmska vrpca, samo što je na našoj, umjesto fotografske emulzije, nanešen sloj željeznog oksida (obična željezna crvena rđa je također takav oksid). Jasno je da za visokokvalitetnu vrpcu postoje razni dodaci i poseban način izrade.

Elektromagnet kojim zapisujemo magnetske slike i s pomoću kojeg ih opet reproduciramo, nazvat ćemo *glavom za sni-*

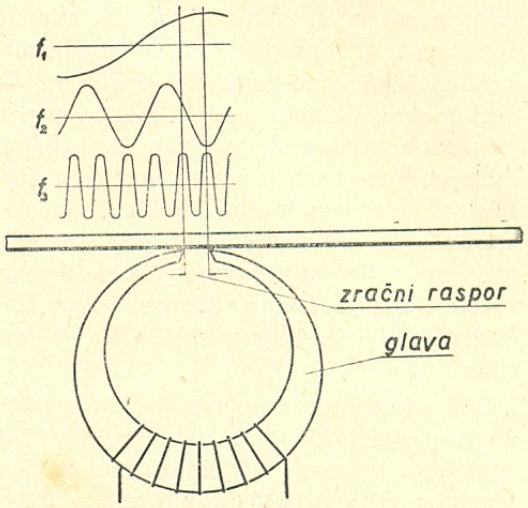
manje, te *glavom za reprodukciju*. Dodat ćemo još jednu *glavu za brisanje*. Magnetska se slika kod reprodukcije praktički ne troši; možemo snimak reproducirati mnogo puta. Taj snimak može se nekom stalnom istosmjernom, a još bolje nečujnom visokofrekventnom izmjeničnom strujom razmazati, t. j. izjednačiti slabije i jače magnetizirana mjesta, pa je onda takva vrpca »izbrisana«, a samim tim ponovno pripravna za novi snimak. Govorili smo o elektromagnetu, a sada imamo odjednom tri glave. Tehničarima je bilo na taj način lakše rješiti, da rukovanje magnetofonom bude prikladnije. Potrebni su nadalje *elektronski uređaji:* mikrofon, pojačalo s elektronkama, kao i zvučnik. Oni proizvedu električnu struju promjenljive jačine, koja se magnetski zapisuje. Kod reprodukcije pojačavaju slabašne inducirane električne struje do željene jakosti i preko zvučnika ih načine čujnim. Za pravilan rad je veoma važan *mehanički pogonski dio*. Kod reprodukcije će biti snimak vjeran samo u tom slučaju, ako vrpca klizi preko glave istom brzinom i jednoliko kao kod snimanja. Za to se brinu motor sa stalnom



Sl. 1.

i jednolikom vrtnjom, zamašnjaci i naročito brižljiva obrada. Svi ti djelovi su zgodno smješteni i međusobno povezani, da bude rukovanje što jednostavnije.

One magnetizirane djeliće, koje smo u početku nazvali »slikama« jačine struje, zaista je najprikladnije poredati jedan uz drugi. Na taj način dobijemo vrpcu na



Sl. 2.

kojoj su »sličice« ostale »zapisane« onim redom kako se jakost struje mjenjala. Vrpca jednoliko klizi preko elektromagnetske glave. Slika 1 ne prikazuje doduše vjerno, ali zato zorno, kako dobijemo magnetski snimak.

Opažamo još jednu novost: *zračni raspor*, koji je od osnovne važnosti i ne smije se mjenjati, jer bi kod reprodukcije inače ulazilo više od jedne magnetske sličice i kvarilo vjernost snimka. Sa njime i sa brzinom gibanja vrpce odrebiti vjerna, a samim time i reprodukcija. I ovdje će nam sl. 2 pomoći, da uočimo, da postoji donja, a tako i gornja granica bolje rečeno, za koje frekvencije će slika đeno je područje za koje promjene, ili frekvencija, koje se mogu snimati i reproducirati magnetofonom i područje (opseg) gdje je snimak vjeran uz danu brzinu pomicanja trake i širine zračnog raspora. Kod današnjih magnetofona zračni raspor ostaje stalan. Brzina, kojom vrpca klizi i zračni raspor utvrđeni su međunarodnim dogovorom, tako da bi se snimci koji su načinjeni s jednim magnetofonom mogli reproducirati drugim. Postoje međunarodno utvrđene tri brzine: spora, za snimanje govora, brža za glaz-

bu, a kod studijskih magnetofona postoji još i treća, veća brzina. Time je postignuta bolja vjernost slike. Kada tolika vjernost nije potrebna, kao na pr. kod govora, sporijim kretanjem vrpce, duže nam traje jedan kolut vrpce. Za vjernu snimku, t. j. reprodukciju, uz dobar mikrofon i ispravno pojačalo, važno je, da jačina struje kojom magnetiziramo vrpcu ne pređe određenu granicu. Kod nekih magnetofona nam u tome pomaže tinjalica, a kod drugih elektronka, koju poznajemo iz radioprijemnika kao »magično oko«. Prejake struje, zbog pojave magnetskog zasićenja, donose tolika izobličenja, da je magnetska slika iskvarena.

Sada, kad smo s tehničke strane upoznali magnetofon, još nekoliko riječi o njegovoj primjeni. Snimaju se govori, glazba i pjesme. Glazba snimljena magnetofonski mnogo je vjernija od one na gramofonskim pločama. Kada budete prvi puta čuli snimljen svoj glas na magnetofonu, možda ćete ga jedva prepoznati. Snimite se zato kako razgovarate s nekim prisutnim, da bi se na taj način lakše uvjerili u vjernost snimke. Mnogi to koriste, pa ispravljaju sebi pogreške kod govora, kod učenja stranih jezika ili uvježbavaju pjevanje. Magnetofonska vrpca se lako lijepi, pa izrezivanjem ili sastavljanjem, a i drugim postupcima, možemo dobiti razne zvučne trikove. Spomenut ćemo samo poznatog gitaristu Less Paul-a. Posebnim načinom dobijemo visokovrijedne zvučne snimke (stereozvuk). Magnetofon se uvrstio i među veoma korisne naučne sprave. Tu on bilježi razne podatke; dovoljno je da su ti podaci zgodno pretvoreni i dostavljeni u obliku električne struje promjenljive jačine. Pomoću njega snimaju brzo i bez teškoća glazbu ili govor primitivnih plemena, krikove divljih ili rijetkih životinja, ali isto tako i telefonske razgovore ili diktate. U računskim strojevima — elektronskim mozgovima — on »pamti«. Postoje magnetofonski snimci na plohama velikim kao listovni papir. Takvo »magnetsko pismo« nam, umjesto pisanih riječi, donosi živi govor. Za male izvedbe magnetofona umjesto vrpce upotrebljavaju se tanke žice iz feromagnetičke tvari, koja zauzima veoma malo prostora. Već su spojili magnetofon sa projekcionom kinokamerom. Uz slike teče crvenkasta pruga magnetske emulzije, pa je moguće snimiti posebne zvučne efekte ili sinhronizirati t. j. popratiti zgodnim riječima snimke na platnu. Danas se već snimaju i reproduciraju prave optičke slike, t. j. televizijske, na magnetofonsku vrpcu, naravno na posebnom uređaju. Velika je i mnogostrana primjena magnetofona, a svakim danom nauka i tehnika nalazi nova područja njegove primjene.

Franc Korman, Zagreb

NOVE KNJIGE

Dr. M. S. Popadić: DELJIVOST CELIH BROJEVA. Matematička biblioteka br. 9. Beograd 1959.

Počevši od drugog decenija našeg stoljeća nastava je matematike u našim školama znatno uznapredovala. Danas se na gimnaziji uče mnoge stvari, koje su nekad jedva ili se uopće nisu ni spominjale. Na pr. vektori, transformacije, skupovi, derivacije, integrali i t. d. A i funkcije tumačile su se nekad vrlo oskudno, tako na pr. u udžbeniku algebre od oko 400 stranica nije bilo nijedne slike, što danas uopće ne možemo ni zamisliti.

Ipak su se u ono doba prvi počeci teorije brojeva strogo obrazlagali: djeljivost brojeva, verižno dijeljenje, rastavljanje brojeva u faktore, broj mjera, Eratostenovo sito, Euklidov poučak da je broj prostih brojeva neograničen i t. d. Uslijed nove građe i malog broja sati taj je dio aritmetike otpao, da se više u školu ne vrati. Zato je ta knjižica dobro došla. Ona obrađuje: osnovne pojmove, najv. zaj. mjeru i najm. zaj. višekratnik, neodređene jednadžbe, proste faktore i neke funkcije vezane za faktore. U uvodu je govora o cijelim brojevima. U cijeloj knjižici ima veliki broj interesantnih podataka, pitanja i zadataka, od kojih većina ima odgovore.

Kako se u knjižici nalaze tumačenja i dokazi za poučke i pravila, s kojima se pri učenju i tumačenju matematike neprestano susrećemo, to će ona dobro poslužiti svakome, koji s voljom i ljubavi hoće da uči i da njeguje matematiku.

S. Š.

R. S. Mitrinović: MALE PLANETE. Matematička biblioteka br. 10., Beograd 1959.

Knjižica daje osnovne podatke o malim planetima, koji se kreću između Marsa i Jupitera, koje je već predvidio Kepler napisavši »Inter Martem et Jovem planetam interposui«, a prvi takav planet otkrio Piazzi 1. I. 1801. Tih planeta otkriveno je dosad oko 1630 i svake se godine otkrivaju novi.

Izbacivanjem umjetnih satelita i stvaranjem umjetnih planeta interes za astronomiju postao je ogroman. Svi hoće da budu upoznati s pojavama u svemiru i zakonima, koji ondje vladaju, da te zakone razumiju i da se nadive najveličanstvenijem triumfu nauke i tehnike otkad postoji ljudski rod.

Knjižica se preporuča svakome, koji hoće da se brzo i lako upozna s jednim vrlo interesantnim dijelom svemirskih zbivanja. *S. Š.*

ZADACI I RJEŠENJA

A) Zadaci iz matematike

363. Data su dva pozitivna broja a i b ($a \neq b$). Pokazati da je

$$(1) \qquad \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

odatle izvesti nejednakost

$$(2) \qquad (a+b)(b+c)c+a) > 8abc,$$

uz pretpostavku da pozitivni brojevi a, b i c nisu svi međusobno jednaki.

Primena: kakav je trougao čije strane a, b, i c zadovoljavaju jednakost

$$(3) \qquad \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right) = 8?$$

364. Sastaviti kvadratnu jednačinu čiji su korени

$$x_1 = m+\sqrt{n},\ x_2 = m-\sqrt{n},\ (n>0).$$

Na osnovu izvedene jednačine izračunati vrednost izraza

$$A = (m+\sqrt{n})^3 + (m-\sqrt{n})^3.$$

365. Data je jednačina

$$x^2 - \frac{b^2}{2}x + \left(\frac{b^2}{4}\right)^2 - 1 = 0.$$

Ako je b srednja strana trougla, a rešenja jednačine takođe strane trougla, dokazati ne rešavajući jednačinu, da je taj trougao pravougli.

366.* U trostranoj piramidi (tetraedru) dva suprotna brida su 4 *cm*, 12 *cm*, a ostali bridovi su 7 *cm*. Izračunati volumen.

367.* Dijametar kruga je 65 *cm*. Lukovima l_1 i l_2 pripadaju tetive 16 *cm* i 52 *cm*. Izračunati duljinu tetive, kojoj pripada luk $l_1 + l_2$,

368. Odredi sve parove brojeva, gdje je razlika između njihovog najmanjeg zajedničkog višekratnika i njihove najveće zajedničke mjere jednaka zadanom broju d. Napose: $d = 30$.

369. Neka se dokaže, da se simetrične točke ortocentra trokuta s obzirom na stranice trokuta nalaze na kružnici oko trokuta opisanoj.

370. Iz ishodišta neka se povuče tangenta na krivulju $y = -2x^3 + 3x^2$ i neka se odredi površina omeđena tom tangentom i krivuljom.

371. Dokaži: *a*) elementarno, *b*) s pomoću računa ekstremnih vrijednosti, da je opseg pravokutnika manji od trostruke njegove dijagonale.

372. Dokaži analitički, da je projekcija dužine normale na provodnicu (radij vektor) prjpadne točke kod čunjosjeka konstantna i jednaka poluparametru p!

373. Nađi jednadžbu čunjosjeka, kome je fokus točka $F(0,0)$, a tangenta pravci:

$$t_1 \equiv 2x-3y-13=0,\ t_2 \equiv 7x-2y-53=0,$$
$$t_3 \equiv 6x-y-37=0.$$

374. Nacrtaj trokut, ako je zadano $a+b = l$, $\alpha-\beta=\delta$, i visina v_a.

Naputak: razmotri trokut ABD gdje je $BD = a+b$.

375. Stranice trokuta čine aritmetičku progresiju, kojoj je diferencija jednaka d; poznat je omjer k površine tog trokuta i površine pravokutnika, što ga čine obje manje stranice trokuta. Kolike su stranice trokuta?

Za diskusiju uzmi u obzir, da je uvjet mogućnosti konstrukcije trokuta, ako je srednja stranica x, $x > 2d$.

B) Zadaci iz fizike

176. Amplituda jednostavnog harmoničkog titranja je 30 *cm*, a perioda 2*s*. U početnom času $t = 0$, pomak je jednak $s = 0$. Kolike su numeričke vrijednosti pomaka, brzine i akceleracije u času $t = T/12$?

177. Uzimamo vodu iz dva spremnika, od kojih jedan ima temperaturu 27 °C, a drugi 67 °C. Koliko kilograma vode treba uzeti iz jednoga, a koliko iz drugog spremnika, da bi dobili 40 *kg* vode temperature 42 °C?

178. Titrajni krug ima koeficijent samoindukcije 0,08 *mH* i kapacitet 10^{-3} μF. Koliki kapacitet treba uključiti serijski u taj krug, da rezonantna frekvencija bude 660 *kHz*?

179. Izmjenična struja koja se mijenja po zakonu $i = 3 \cos 450\, t$ ampera, grana se u točki A u dvije grane. Jedna grana ima otpor 60 Ω, a druga 40 Ω. U točki B grane se ponovno sastaju. Kolika se energija pretvori u toplinu između točaka A i B u vrijeme jedne periode?

180. Dijapozitiv ima 400 cm^2 i treba ga proicirati na platno, koje ima oblik sličan dijapozitivu, a površinu 9 m^2. U koju udaljenost od dijapozitiva treba staviti objektiv projekcionog aparata, ako je žarišna daljina objektiva $f = 30$ cm?

C) Rješenja iz matematike

349. *Dat je trapez ABCD, čiji su kutovi A i D pravi, a čija dijagonala AC je normalna na stranici BC.*

a) Pokazati da su trokuti ABC i ACD slični. Odatle izvesti relaciju

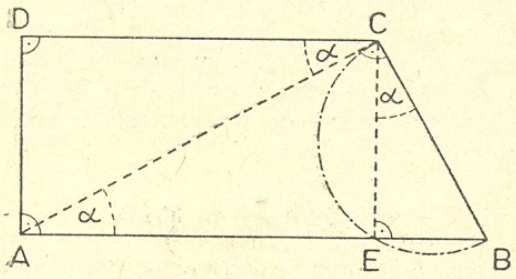
$$AC^2 = AB \cdot CD. \qquad (1)$$

b) Krug, čiji je promjer BC, siječe AB u E. Ispitati prirodu četverokuta AECD i odatle izvesti jednakost (1).

c) Dato je AB = 10 cm, CD = 7,5 cm; izračunati AC, BC, AD i BD kao i kutove B i C trapeza.

a) $AD \perp AB$, $CD \perp AD$, $CD \parallel AB$, $\triangle ABC$ i $\triangle ACD$ slični su, jer se podudaraju u dva kuta; jedan pravi, i drugi uz transverzalu.

$$AB : AC = AC : CD, \quad AC^2 = AB \cdot CD.$$



b) $\sphericalangle CEB$ je pravi, $CE \parallel AD$, $AE \parallel CD$. Četverokut $AECD$ je pravokutnik. Prema Euklidu je

$$AC = \sqrt{AB \cdot AE}, \quad AE = CD, \quad AC^2 = AB \cdot CD.$$

c) $AB = 10$, $CD = 7{,}5$

$$AC = \sqrt{75}, \quad AC = 5\sqrt{3}$$

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} \quad AD = \sqrt{CD \cdot (AB - CD)}$$

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} \quad BC = \sqrt{100 - 75}$$

$$AD = \sqrt{2{,}5 \cdot 7{,}5} \quad BD = \sqrt{118{,}75}$$

$$BC = 5 \quad AD = \sqrt{18{,}75}$$

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2},$$

$$\alpha = 30°$$

$$\sphericalangle ABC = 90° - 30° \qquad \sphericalangle BCD = 90° + 30°$$

$$\sphericalangle ABC = 60° \qquad \sphericalangle BCD = 120°$$

Hendeković Josip, 4.b 2. g. Zagreb

350. *Ako logaritmi*

$$\log_k x, \ \log_m x, \ \log_n x$$

obrazuju aritmetičku progresiju, pokazati da je

$$n^2 = (kn)^{\log_k m}.$$

Ako svedemo logaritme na istu bazu n i uzmemo da je srednji član aritmetička sredina druga dva člana, imamo

$$\log_m n \log_m x = \frac{\log_k n \log_n x + \log_n x}{2}$$

t. j.

$$2 \log_m n = \log_k n + 1$$

$$\log_m n^2 = \log_k (nk)$$

$$n^2 = m^{\log_k (nk)} = k^{\log_k m \log_k (nk)} = (nk)^{\log_k m}$$

Bodlović Petar, 4.a r. 1. g, Zagreb

351. *Data je funkcija*

$$f(x) = (1 + \sin x)^{\frac{1}{2}} - (1 - \sin x)^{\frac{1}{2}}.$$

a) Dokazati identičnost

$$f(\pi - 2x) = 2 - [f(x)]^2.$$

b) Izraz $1 - f(x)$ *preurediti, da se može logaritmirati.*

c) Riješiti jednadžbu

$$f(x) = f(px) \operatorname{ctg} \frac{px}{2}$$

gdje je p realni broj.

a) Kako je $f(\pi - 2x) = f(2x)$, treba dokazati da je

$$(1 + \sin 2x)^{\frac{1}{2}} - (1 - \sin 2x)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2 - \left[(1 + \sin x)^{\frac{1}{2}} - (1 - \sin x)^{\frac{1}{2}}\right]^2.$$

Iz $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ i $2 \sin x \cos x = \sin 2x$, dobiva se zbrajanjem i oduzimanjem

$$\sin x + \cos x = \pm \sqrt{1 + \sin 2x},$$

$$\sin x - \cos x = \pm \sqrt{1 - \sin 2x}.$$

Ako je $\sin x + \cos x > 0$ t. j. $(-45° < k \cdot 360° < x < 135° + k \cdot 360°)$ i $\sin x - \cos x < 0$ t, j. $-135° + k \cdot 360° < x < 45° + k \cdot 360°$, što zajedno daje $-45° + k \cdot 360° < x < 45° + k \cdot 360°$, onda je

$$\sin x + \cos x = \sqrt{1 + \sin 2x},$$

$$\sin x - \cos x = -\sqrt{1 - \sin 2x}, \quad \text{i}$$

$$\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} = 2 \sin x,$$

$$2 - [f(x)]^2 = 2 - [2 - 2 \mid \cos x \mid] =$$

$$= 2 \mid \cos x \mid = 2 \cos x$$

za $-90°+k\cdot 360°<x<90°+k\cdot 360°$ i $-2\cos x$
za $90° + k \cdot 360° < k < 270° + k \cdot 360°$.

Na sličan način dobivamo za

$$45° + k \cdot 360° < x < 135° + k \cdot 360°$$

da je $\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} = 2\cos x$ za $135° + k \cdot 360° < x < 225° + k \cdot 360°$ je za

$$\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} = -2\sin x$$

i za $225° + k \cdot 360° < x < 315° + k \cdot 360°$ ima vrijednost $-2\cos x$.

Uspoređujući vrijednosti izraza

$$\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}$$

i $$2 - (\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x})^2$$

u pojedinim intervalima, vidi se, da su oni identički jednaki za

$$45° + k \cdot 360° < x < 90° + k \cdot 360°$$

i $225° + k \cdot 360° < x < 270° + k \cdot 360°$

t. j. za $45° + k \cdot 180° < x < 90° + k \cdot 180°$.

b) Ako je $f(x) = 2\sin\frac{x}{2}$, to je

$$1 - f(x) = 1 - 2\sin\frac{x}{2} = 2\left(\sin\frac{\pi}{6} - \sin\frac{x}{2}\right) =$$

$$= 4\sin\frac{\pi - 3x}{12}\cos\frac{\pi - 3x}{12}$$ i t. d.

c) Ako je $f(x) = 2\sin\frac{x}{2}$ i ako je $f(px) = 2\sin\frac{px}{2}$ (u spec. intervalima, koji ovise o broju p), jednadžbu je lako riješiti. Ona postaje

$$\sin\frac{x}{2} = \cos\frac{px}{2} \text{ t. j. } \sin\frac{x}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{px}{2}\right).$$

Dakle je $\frac{x}{2} = \frac{\pi - px}{2} + 2k\pi$ i

$$\frac{x}{2} = (2k + 1)\pi - \frac{\pi - px}{2}.$$

Odakle se lako izračuna x.

Bodlović Petar, 4. a r. 1. g. Zagreb

352. *Parabola prolazi točkama A (6, -1) i B (3, 1), dira pravu $x + 3y - 2 = 0$, dok joj osa uporedna s osom apscisa.*

Naći jednačinu te parabole i koordinate tačke dodira.

Ta parabola ima jednačinu oblika

$$(y - n)^2 = 2p(x - m), \qquad (1)$$

gde je teme $T(m, n)$.

Koordinate tačaka A i B zameni u jednačinu (1):

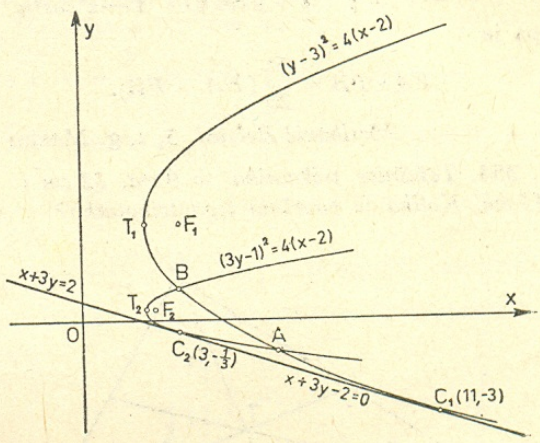
$$(-1 - n)^2 = 2p(6 - m)$$
$$(1 - n)^2 = 2p(3 - m).$$

Odakle izlazi $4n = 6p$, $n = \frac{3}{2}p$.

Treću jednačinu dobivamo iz uslova da je prava tangenta parabole tj. $D = 0$.

Zamenimo $k = 2 - 3y$ u (1) imamo

$$y^2 - 2y(n - 3p) + n^2 - 4p + 2mp = 0$$
$$D = (n - 3p)^2 - n^2 + 4p - 2mp = 0$$
$$9p - 6n - 2m + 4 = 0, \quad n = \frac{3}{2}p.$$
$$9p - 9p - 2m + 4 = 0, \quad m = 2,$$



$$\left(1 - \frac{3}{2}p\right)^2 = 2p, \quad 9p^2 - 20p + 4 = 0$$

$$p_1 = 2, \quad p_2 = \frac{2}{9}, \quad n_1 = 3, \quad n_2 = \frac{1}{3}.$$

Jednačina je parabole

1. $(y - 3)^2 = 4(x - 2)$, dodirna tačka $C_1(11, -3)$.
2. $\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}(x - 2)$, $C_2\left(3, -\frac{1}{3}\right)$.

Rind Ištvan, 4 b r. g. »M. Pijade«, Subotica

353. *Tetiva elipse prolazi njezini fokusom F. Dokaži da je*

$$FA \cdot FB = \frac{b^2}{2a}(FA + FB),$$

ako je a velika, a b mala poluos elipse. (Upotrebi polarnu jednadžbu elipse!).

Polarna jednadžba elipse (s polom u lijevom fokusu) glasi:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi},$$

gdje je r udaljenost od pola (fokusa F), φ ugao pod kojim se tačka vidi iz fokusa F, $p = \frac{b^2}{a}$ poluparametar i ε numerički ekcentricitet elipse.

Dakle je

$$FA = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi} \text{ i } FB = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi_1}$$

i zbroj $\varphi_1 = \varphi + 180°$, $FB = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}$.

Odatle izlazi

$$FA \cdot FB = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi} \cdot \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi} =$$

$$= \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2\varphi} \text{ i } \frac{b^2}{2a}(FA + FB) =$$

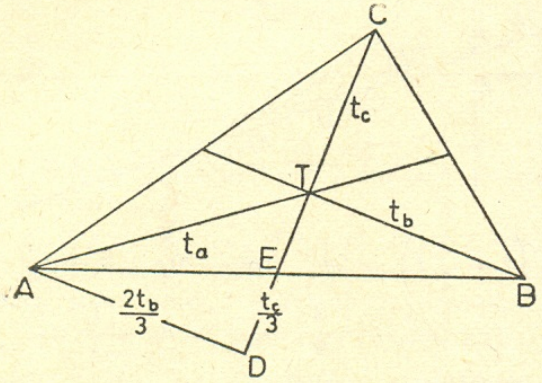
$$= \frac{p}{2}\left(\frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi} + \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}\right) = \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2\varphi},$$

pa je

$$FA \cdot FB = \frac{b^2}{2a}(FA + FB).$$

Mesihović Behđed, 3_2 r. g. Mostar

354. *Težišnice trikotnika so 9 cm, 12 cm in 15 cm. Kolika je površina tega trikotnika?*



Trikotnik ADT je pravokoten, ker merska števila njegovih stranic tvorijo trojico pitagorskih števil (6, 8 in 10). Stranica AD je pravokotna na DC in je zato tudi enaka višini trikotnika AEC. $P_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot EC \cdot AD =$

$= \frac{1}{2} \cdot t_c \cdot \frac{2}{3} t_b = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 = 36$. Trikotnika AEC in EBC sta enaka ($AE = EB$ in skupna visina).

$$P_{ABC} = P_{AEC} + P_{EBC} = 2.\ P_{AEC} = 2 \cdot 36 = 72\ (cm^2).$$

Maček Vilko, 2. b r. 4. g. Ljubljana

Napomena ured. Mnogi rješavatelji izračunavali su površinu trokuta ADT Heronovom formulom. Ispravan, no dulji put.

355. *Roba se podraži za $p\,\%$. Za koliko procentov jo je treba potem poceniti, da se cena vrne na prejšno?*

Označimo z m prvotno ceno blaga, z x pa število procentov, ko robo procenimo.

Če podražimo za $p\,\%$ je potem cena

$$m_1 = m + \frac{mp}{100}.$$

Cena za $x\,\%$ pocenjenega blaga je enaka prvotni in od tu dobimo enačbo

$$m = m_1 - \frac{xm_1}{100}.$$

Če sem vstavimo izraz za m_1, dobimo

$$m = m + \frac{mp}{100} - \frac{1}{100}x\left(m + \frac{mp}{100}\right)$$

in od tu dalje

$$100mp = 100xm + xmp$$

$$x = \frac{100p}{100 + p}.$$

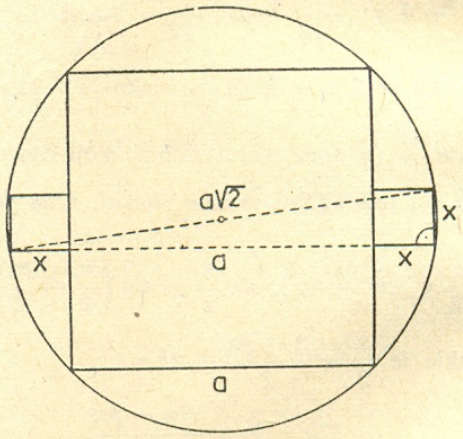
Indihar Stanko, dij. 3. r. g. Kočevje

356. *Квадрату стране a описан је круг. У настали кружни сегмент уписан је други квадрат. Колика је страна тога мањега квадрата?*

Из правоуглог троугла имамо

$$(2x + a)^2 + x^2 = (a\sqrt{2})^2.$$

$$5x^2 + 4ax - a^2 = 0.$$



Решимо ли, добијамо $x = \frac{a}{5}$. (Друго решење: $x = -a$ отпада).

Дедић Божидар, 4_5 г. »Св. Марк« Ниш

357. *Решити графички помоћу извода, за које вредности од m има једначина*

$$(m - 4)x^2 - (m + 14)x + 7m - 8 = 0$$

а) оба корена између -3 и 4; b) само један корен између -3 и 4. Резултат провери рачунски.

Решимо ли дату једначину по m добивамо функцију:

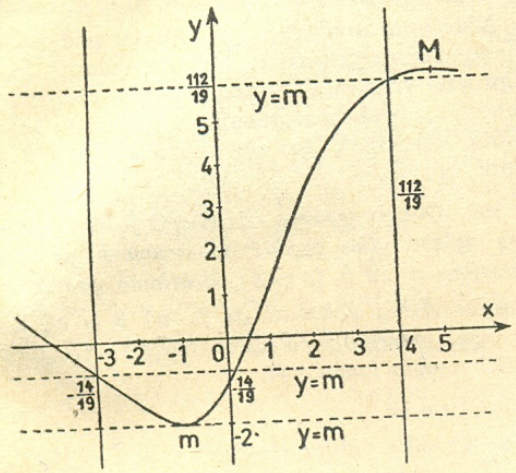
$$m = \frac{4x^2 + 14x - 8}{x^2 - x + 7}.$$

Како је $x^2 - x + 7 > 0$ ($D < 0$, $a > 0$) за свако x, закључујемо да је дата функција дефинисана за све вредности од x.

Извод ове функције је:

$$m' = -18\,\frac{x^2 - 4x - 5}{(x^2 - x + 7)^2}$$

и она се поништава за $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$.



m' је веће од нуле за све вредности од x у интервалу између -1 и 5, иначе је негативно.

x	$-\infty$		-1		5	$+\infty$
m'	$-$		0	$+$	0	$-$
m	4	$\searrow$	-2 *min.*	$\nearrow$	6 *maks.*	$\searrow$ 4

a) Посматрајући нацртани график закључујемо да се оба корена налазе између -3 и 4, ако m узима вредности од $-\frac{14}{19}$ до -2.

b) За $m < \frac{112}{19}$ и $m > -\frac{14}{19}$ само један је корен садржан између -3 и $+4$.

Исти резултат се добива рачунски из услова да је:

a) I $D \geqslant 0$ код нас за $m > -2$, $m < 6$

II $(m-4)\cdot f(-3) > 0 \rightarrow m > 4$, $m < -\frac{14}{19}$

III $(m-4)\,f(4) > 0 \rightarrow m < 4$, $m > \frac{112}{19}$

IV $-3 < \frac{m+14}{2(m-4)} < 4 \rightarrow$ *a*) $m > 4$, $m < \frac{10}{7}$

b) $m > \frac{46}{7}$, $m < 4$

Заједничко решење неједнакости је

$$m > -2 \text{ и } m < -\frac{14}{19},$$

што смо и графички добили.

Услов под *b*) испуњен је ако је:

$$f(-3)\cdot f(4) < 0.$$

Та неједначина у нашем случају задовољена је за

$$m > -\frac{14}{19} \text{ и } m < \frac{112}{19}.$$

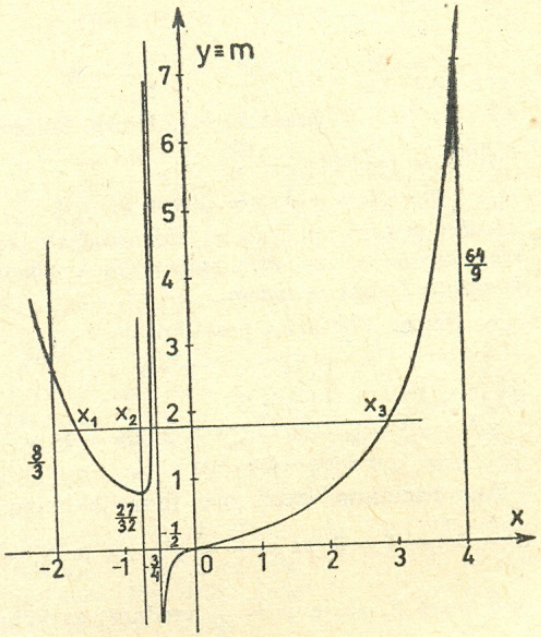
што смо и графички закључили.

Ђурић Гав. Зоран, уч. 4₁ р. г. Чачак

358. *Ugotovi potek krivulje* $y = \frac{x^3}{2x+1}$!

Določi grafično zakatere vrednosti m ima enačba $x^3 - 2mx - m = 0$ *a) vse tri korene med* -2 *in* 4, *b) samo* 2 *korena med* -2 *in* 4.

Funkcija $y(x)$ ima za $x = 0$ vrednosti 0, za $x \to -\frac{1}{2}$ pa raste preko vsake meje. Odvod je $y' = x^2\,\frac{4x+3}{(2x+1)^2}$ in je enak 0 za $x = -\frac{3}{4}$, Potek funkcije je potem sledeč [$y''(0) = 0$, $y''\left(-\frac{3}{4}\right) > 0$ ker y'' ima znak od $x^2(4x+3)]' = 12x^2 + 6x$; v O je obračaj]:



x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	∞	$+$	∞
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{32}$ *min.*	$\nearrow$	$\pm\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Če enačbo $\alpha^3 - 2mx - m = 0$ rešimo po m; dobimo $m = \frac{x^3}{2x+1} = y$, Iz slike te funkcije lahko hitro ugotovimo:

a) da se dva korena nahajata med -2 in 4 za $\frac{8}{3} < m < \frac{64}{9}$ iz *b*) vsi trije koreni med -2 in 4 za $\frac{27}{32} \leq m < \frac{8}{3}$.

Janez Lesjak, 3. r. g. Kočevje

359. Израчунај $\int \cos^5 x\, dx$.

$$\int \cos^5 x\, dx = \int \cos x\, (\cos^2 x)^2\, dx =$$

$$= \int \cos x \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \cos x \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(\frac{5}{2}\cos x + \frac{5}{4}\cos 3x + \frac{\cos 5x}{4}\right) dx =$$

$$= \frac{5}{8}\sin x + \frac{5}{48}\sin 3x + \frac{1}{80}\sin 5x + c.$$

Слободан Милојковић, г. »Св. Марк«, Ниш

Neki učenici služili se ovom metodom:

$$\int \cos^5 x\, dx = \int (1 - \sin^2 x)^2\, d\sin x =$$

$$= \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)\, d\sin x =$$

$$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + k.$$

Janez Lesjak, 3. r. g. Kočevje

360. *U jednačini*

$$x^2 - 2(m-1)x - (2m+1) = 0$$

odrediti m tako da bude a) zbir kvadrata korena minimum, b) zbir recipročnih vrednosti kvadrata korena minimum.

a) Prema Vijetovim pravilima je

$$x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q,$$

pa je u našem slučaju

$$x_1^2 + x_2^2 = (-2m+2)^2 + 2(2m+1) =$$
$$= 4m^2 - 4m + 6 = S.$$

Ako načinimo izvod ove funkcije imamo $S' = 8m - 4 = 0$ za $m = \frac{1}{2}$, a jer je $S'' = 8$ tj. > 0, to je $m = \frac{1}{2}$ vrednost za koju je S minimalno ($= 5$),

b) Pošto je $S_1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2}$,

to je $S_1 = \frac{S}{q^2} = \frac{4m^2 - 4m + 6}{4m^2 + 4m + 1}$, a

$$S_1' = \frac{32m^2 - 40m - 28}{(2m+1)^2},\quad S_1' = 0$$

za $8m^2 - 10m - 7 = 0$, $m_1 = \frac{7}{4}$, $m_2 = -\frac{1}{2}$.

S''_1 ima znak od $16m - 10$, pa je

$$S''_1\left(\frac{7}{4}\right) = 18 \text{ tj. } > 0, \text{ te za } m = \frac{7}{4}$$

S_1 poprima minimum $\frac{5}{9}$, Za $m = -\frac{1}{2}$ S_1 je beskonačno veliko.

Sušić M. Tomislav, 4_4 r. g. Čačak

Napomena uredništva. U zadatku pod b) je štamparskom griješkom bilo štampano: „recipročna vrijednost zbroja kvadrata korijena“ mjesto „zbroj recipročnih vrijednosti kvadrata korijena“, što su i mnogi učenici i sami opazili.

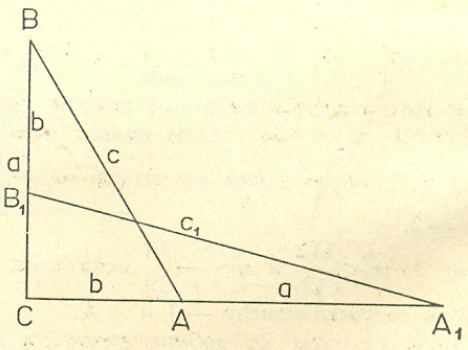
361. *Dat je trougao ABC (C je teme pravog ugla). Ako produžimo stranu b za a i skratimo a za b ($a > b$), dobijamo pravougli trougao ABC, dokazati da je a) $c_1 = c\sqrt{2}$, b) ugao između hipotenuza trougla A_1B_1C i ABC trougla iznosi $\pi/4$.*

Rešenje:

a) Sa slike vidimo da je

$$\overline{A_1B_1}^2 = c_1^2 = \overline{B_1C}^2 + \overline{CA_1}^2 =$$
$$= (a-b)^2 + (a+b)^2 = 2(a^2 + b^2) = 2c^2$$

pa je $c_1 = c\sqrt{2}$.



b) Iz pravouglih trouglova imamo da je

$$tg\,\alpha_1 = \frac{a-b}{a+b} \quad \text{i} \quad tg\,\alpha = \frac{a}{b},$$

a s druge strane znamo da je $\alpha = \alpha_1 + x$, gde smo sa x obeležiti ugao između hipotenuza datih trouglova; tada imamo

$$tg(\alpha_1 + x) = \frac{tg\,\alpha_1 + tg\,x}{1 - tg\,\alpha_1\, tg\,x}.$$

Zamenom poznatih vrednosti gornja jednakost dobija oblik

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a-b}{a+b} + tg\,x}{1 - \frac{a-b}{a+b}tg\,x} \qquad \text{ili}$$

$$a\left(1-\frac{a-b}{a+b}\,tg\,x\right)=b\left(\frac{a-b}{a+b}+tg\,x\right)$$

i odatle $tg\,x\,(a^2+b^2)=a^2+b^2$ tj.

$$tg\,x=1 \quad \text{ili} \quad x=\frac{\pi}{4}.$$

Jevrosima Stanojević
vanr. uč. 4 r. g. »Sv. Marković«, Niš

362. *Збир двају бројева је s, њихов најм. зај. садржалац је v. Који су то бројеви? Напоре* $s=78$, $v=216$.

Нека је највећи зај. делилац тражених бројева x и y A, то је $x=Am$, $y=An$, (m и n су рел. прости). Зато је $v=Amn$ па је

$$\frac{s}{v}=\frac{A\,(m+n)}{Amn}=\frac{m+n}{mn}.$$

Ако s и v имају зај. делилац δ, онда је $\frac{s}{v}=\frac{s'}{v'}$. Како су $m+n$ и mn релативно прости, јер су m и n релативно прости, то је нужно $m+n=s'$, $mn=v'$. Одатле је

$$m=\frac{s'-\sqrt{s'^2-4v'}}{2},\quad n=\frac{s'+\sqrt{s'^2-4v'}}{2}.$$

Узимајући посебан случај тј. $s=78$ и $v=216$ налазимо $m+n=13$, $mn=36$. Ријешимо ли те једначине налазимо $m=4$, $n=9$, а како је $Amn=216$, то је $A=6$. Тражени бројеви ће бити $4\cdot 6$ и $9\cdot 6$ тј. 24 и 54.

Светозар Гогић, 4_2 р. г. »Ст. Ц.« Никшић

Riješili zadatke iz 3. broja

Ađaš Atila, T. S. Š., Subotica, 349; *Andrić Pero*, 2. a r. g. Visoko, 349, 356, 361; *Bajtarević Ahmed*, 4. r. g. Visoko, sve zadatke; *Bazler Mikloš*, 2_4 raz. g. Sombor, 349, 354, 355, 356, 361, 362; *Bodlović Petar*, 4. b raz. 1. g. Zagreb, sve zadatke; *Bogovčić Franci*, 3. b raz. gimn. Brežice, 355; *Bradač Primož*, 2. b r. 1. gimn. Ljubljana, 349, 354, 355, 356; *Cankar Ivan*, 3. r. g. Škofja Loka, 349, 354, 361; *Čabarkapa Tomislav*, 4. raz, g, Plevlja, 349, 352, 354, 361, 362; *Čutović A. Mihailo*, 4_4 r. g. Čačak, 349, 352, 354, 355, 356, 361; *Dvizac Menail*, III Am STŠ Mostar, 349, 351, 352, 354, 355, 356, 357, 358, 360, 361; *Đurić Dragiša*, 4_5 r. g. Čačak, 349, 350, 352, 354, 355, 356, 361; *Fehér Kamilo*, 2_4 raz. g. Sombor, 349, 354, 355, 356, 362; *Fill Ferenc*, 2_4 r g. Sombor, 349, 354, 355, 356, 361, 362; *Gros Mladen*, 4a r. 4. g. Ljubljana, sve zadatke; *Hendeković Josip*, 4. b raz. 2. g. Zagreb, sve zadatke; *Iličić Miroslav*, 3. b r. g. Vukovar, 349, 361; *Indihar Stanko*, dij. 3. raz. gimn. Kočevje, 351, 354, 355, 356, 360, 361, 362; *Kaldana Josip*, 2. d r. 5. g. Zagreb, 349, 355; *Kovačina Marko*, 3_2 r. g, Mostar, 349, 361; *Krebs Silvija*, 3_4 r. gimn. Sombor, 349, 354, 355, 356, 361; *Lautar Franc*, 2. a raz. gimn. Kočevje, 349, 354, 356. 357, 358, 359, 361; *Lesjak Janez*, 3. r. g. Kočevje, sve zadatke; *Limburger Maćaš*, 2_4 r. g. Sombor, 349, 354, 355, 356, 361, 362; *Pohar Florijan*, 2. b r. g, Kranj, 349, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362; *Lojen Miroslav*, 4. a r, g. Varaždin, sve zadatke; *Ljubek Boris*, 2. d r. g, Karlovac, 354, 362 (djel.); *Maček Vilko*, 2. b raz. 4. g. Ljubljana, 349, 354, 355, 356, 360, 361, 362; *Mere Ištvan*, 4. b raz. g. Sombor, 349, 351, 354, 355, 356, 360, 361; *Mesihović Behded*, 3_2 r. g. Mostar, sve zadatke; *Novak Debeljević*, geo_1 STŠ Titograd, 349, *Paar Vladimir*, 2. a r, 5. g. Zagreb, 349, 354, 355, 356, 361, 362; *Pehlivanović Hamid*, III Am STŠ Mostar, 349, 354, 356, 361; *Putina Risto*, 4. b raz. g. Dubrovnik, 352, 355, 361; *Rind Ištvan*, 4. b razr. gimn. »M. Pijade«, Subotica, 349, 350, 351, 352, 356, 360, 361; *Spreharsky Miroslav*, 4, r. g. Bački Petrovac, 352; *Stanojević Jevrosima*, 4. r. g. »Sv. Mark.« Niš, 349, 351, 352, 353, 354, 356, 359, 360, 361; *Suljagić Salih*, 3. c raz, 5. g, Zagreb, 349, 351, 354, 356, 357, 359, 361, 362; *Šoštarić Ivanka*, 4. c raz. 1, g. Zagreb, 349, 352, 359, 361; *Šušić M. Tomislav*, 4_4 r. g. Čačak, 349, 350, 351, 352, 353, 354. 355, 356, 359, 360, 361, 362; *Uravić Mladen*, 4. b r. 2. g. Rijeka, sve zadatke; *Utvić Smiljka*, 4_1 raz. g. Ruma, 352; *Благојевић Гордана*, 3_1 разр. гимн. Ћуприја, 349; *Богданое Лазар*, 2_1 разр. 8 београдске гимн. 349, 355, 361; *Борота Предраг*, 4_4 р. 11 гимн. Београд, 354, 355, 360; *Вечански Драгомир*, 2а раз. г. Вршац, 349, 354, 355, 356, 361, 362; *Вујовић Милош*, 4_3 р. гимн. Никшић, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 355, 356, 361, 362; *Вуксановић Миро*, 1 б раз. г. »Ст. Цер.«, Никшић, 349, 354, 356, 362; *Гогић Светозар*, 4_2 раз. г. »Ст. Цер.«, Никшић, 349, 362; *Дедић Божиоар*, 4_5 р. г. »Св. Марк.«, Ниш, 349, 350, 352, 354, 356, 361; *Дитески Горе*, 3 раз. г. »Мирче Ацев« Прилеп, 349; *Драшковић Радоје*, 4а раз. г. Цетиње, 349, 354, 356, 360, 362; *Ђурић Г. Зоран*, 4_1 р. р. Чачак, све задатке; *Илић Петар*, 2_1 р. гимн. Аранђеловац, 349, 355, 356, 361; *Јеверичић Милан*, 4_5 раз. г. »Св. Марк.« Ниш, 349, 350, 356, 360, 361, 362; *Јовићевић Светозар*, СТШ, Титоград, 349; *Јовчевски Стојман*, 4а кл. гимн. Куманово. 352; *Калајџић Милосав*, 3_2 р. гимн. Чачак, 349, 350, 351, 352, 354, 355, 356, 360, 361;

Кирић Миодраг, 2 р. гимн. Зрењанин, 349, 351, 354, 356, 357, 360, 361, 362; *Лаиковић Богољуб*, 4а р. г. »J. J. Змај«, Novi Sad, 349, 352; *Микетић Драгиша*, 4_2 р. г. Алексинац, 349, 350, 352, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 361, 362; *Милојковић Слободан*, 4_5 р. гимн. »Св. Марк.« Ниш, 349, 350, 351, 352, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361; *Милутиновић Драгослав*, 4_2 раз. г. Алексинац, 349, 352, 354, 356, 361; *Митровић Милорад*, 1_7 раз. г. »Ст. Церовић«, Никшић, 349, 354, 356, 361; *Мркић Мило*, 4_3 р. г. »Ст. Цер.«, Никшић, 349, 351, 353, 354, 356, 360, 361; *Најдова Душанка*, 2 кл. гимн. Битола, 349, 354, 355, 360, 361, 362; *Никшетић Јакша*, 3_4 р. г. »Ст. Церовац«, Никшић, 349, 354, 362 (дел.); *Павловић Владан*, 4_3 р. г. Светозарево, све задатке; *Перовић Глигорије*, СТШ гео[3] Титоград, 349, 361; *Петровић Мирослав*, 1_1 р. г. »Ст. Сремац«, Ниш, 355; *Поповић Марко*, 4 раз. г. Чачак, 349, 352, 353, 354, 355, 356, 360, 361; *Ћирић Слободан*, 3_4 р. г. »Ст. Церовац«, Никшић, 349, 351, 354, 355, 360, 361, 362 (дел.); *Улчар Франц*, 4а р. г. »J. Б. Тито«, Скопје, 349; *Церовић Бато*, 2_3 разр. г. »Ст. Церовац«, Никшић, 349, 354, 356.

Pravodobno riješili zadatke iz 2. broja

Škrbić, Predrag, 4. r. gimn. Vrbas, 330, 337, 340, 341, 342, 348; *Јевтић Милан*, 4_3 р. г. »В. Караџић«, Лозница, 335, 337, 338, 339, 340, 345, 348.

D) Rješenja zadataka iz fizike

171. *Masa lifta i tereta, kojim je lift opterećen je 6 tona. Lift se spušta jednolikom brzinom 313 m min^{-1}. Maksimalna napetost užeta smije biti 14.10^3 kp. Kolika je najveća akceleracija, kojom se lift smije zaustaviti? Koliki je najkraći put, na kojem se lift smije zaustaviti?*

Napetost užeta je jednaka zbiru sila: težine lifta T i sile inercije F. Težina lifta $T = mg = 6\,000 \cdot 9{,}81$ kp, a sila inercije $F = ma = 6\,000 \cdot a$ kp, te je

$$6\,000 \cdot 9{,}81 + 6\,000 \cdot a = 14 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81.$$

Odatle je

$$a = (14 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 - 6 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81)\frac{1}{6 \cdot 10^3} = 13{,}08 \text{ m s}^{-2}.$$

Lift će se zaustaviti na najkraćem putu uz najveću akceleraciju, pa je

$$s = \frac{v^2}{2a} = \left(\frac{313}{60}\right)^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 13{,}08} = \underline{1{,}04\ m,}$$

Behđed Mesihović, 3_2 r. g. Mostar

172. *Početna temperatura nekog plina je 20°C. Do koje temperature treba zagrijati taj plin, da bi se srednja brzina njegovih molekula povisila za 20% prema početnoj?*

Prosječna brzina molekula plina kod apsolutne temperature T dana je izrazom

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Ako je v_{20} prosječna brzina molekula kod 20 °C, a v_t kod temperature t, kod koje je prosječna brzina molekula v_t za 20% veća nego prosječna brzina molekula v_{20} kod 20 °C onda je

$$v_t = v_{20} + \frac{v_{20} \cdot 20}{100} = \frac{6}{5} v_{20}.$$

Kako je

$$v_{20} = \sqrt{\frac{3R}{M} \cdot 293{,}2}, \text{ a } v_t = \sqrt{\frac{3R}{M}(273{,}2 + t)}$$

dobijemo: $\frac{36}{25} v_{20}^2 = v_t^2$

ili $\frac{36}{25} \cdot \frac{3R}{M} \cdot 293{,}2 = \frac{3R}{M}(273{,}2 + t)$

onda je $\underline{t = 149\,°\text{C}.}$

Bodlović Petar, 8. a r. 1. g. Zagreb

173. *Tramvajski vod ima otpor 0,3 oma po km. Jedan tramvaj je udaljen 2 km, a drugi 3 km od ispravljačke stanice, koja ga napaja. Kroz svaki motor prolazi struja od 50 A. Koliki je pad napona na vodu od ispravljačke stanice do drugog tramvaja? Povratni vod (tlo) ima otpor 0.*

Jačina električne struje iz ispravljačke stanice mora biti 100 A (Kirchhoffov zakon) za oba tramvaja. Po Ohmovom zakonu na prva 2 km je pad napona $V_1 = i \cdot r = 110 \cdot 0{,}6\ V = 60\ V$. Poslije drugog km je jakost struje 50 A. Pad napona na trećem km je $V = 50 \cdot 0{,}3\ V = 15\ V$. Sveukupni pad napona od ispravljačke stanice do drugog tramvaja je

$$V = V_1 + V_2 = 60 + 15 = \underline{75\ V.}$$

Bajtarević Ahmed, 4. r. g. Visoko

174. *Polumjer zakrivljenosti plankonveksne leće je 118 cm. Ona je položena na planparalelnu ploču. Odozgo je obasjana monohromatskom svjetlošću, koja daje Newtonove kolobare u reflektriranoj svjetlosti. Prvi svjetli kolobar ima polumjer 0,83 mm. Kolika je dužina vala upotrebljene svjetlosti i koliko dioptrija ima plankoveksna leća? Indeks loma stakla je 3/2.*

Iz obrasca za polupročnik svetlog prstena

$$r = \sqrt{(2k-1)R\frac{\lambda}{2}}$$

sledi

$$\lambda = \frac{2r^2}{(2k-1)R} = \frac{2 \cdot 0{,}83^2}{1180}\ \text{mm} = \underline{11676\ \text{Å}}.$$

Za naše sočivo važiće relacija (plankonveksno sočivo)

$$\frac{1}{7} = (n-1) \cdot \frac{1}{r}.$$

Odavle je

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{2r} = \frac{1}{236},$$

odnosno

$$C = \frac{1}{7} = \frac{1}{2{,}36} \approx +0{,}4\ \underline{\text{dioptrije}}.$$

N. B. U zadatku je pogrešno odštampano: polumjer prvog svetlog prstena; trebalo je stajati: prvog tamnog prstena. U tom slučaju je

$$\lambda = \frac{r^2}{R} = \frac{0{,}83^2}{1180}\ \text{mm} = \underline{5838\ \text{Å}}.$$

Tomislav M. Šušić, 4_4 r. g. Čačak

175. *Uski snop sunčeve svjetlosti prolazi kroz optičku rešetku, koja ima 8000 crta na 1 cm i stvara spektar prvog reda na zastoru udaljenom 100 cm od rešetke. Kolika je udaljenost između Frauenhoferova C i F linije na zastora?* $\lambda_F = 4861$ *Å*, $\lambda_C = 6563$ *Å*.

Iz jednačine optičke rešetke

$$n\lambda = d \sin\varphi$$

dobivamo za

$$\lambda_F \text{ je } \sin\varphi_F = \frac{\lambda}{d} = \frac{4861 \cdot 10^{-8}}{1/8000},$$

odnosno $\varphi_F \approx 23°$, a za

$$\lambda_C \text{ je } \sin\varphi_C = \frac{6563 \cdot 10^{-8}}{1/8000},$$

odnosno $\varphi_C \approx 32°$.

Udaljenost $\overline{OF}$ F linije od spektra nultog reda, t. j. točke O izračunamo iz relacije

$$tg\,\varphi_F = \frac{OF}{100},\ \text{t. j. } tg\,23° = \frac{OF}{100}.$$

Odatle je

$$\overline{OF} = 100 \cdot tg\,23° \approx 42\ cm,$$

odnosno analogno za liniju C:

$$\overline{OC} = 100 \cdot tg\,32° \approx 62\ cm.$$

Prema tome tražena udaljenost između linija C i F je $\underline{CF \approx 20\ cm}$.

Tomislav M. Šušić, 4_4 r. g. Čačak

Riješili zadatke fizike iz 3. broja

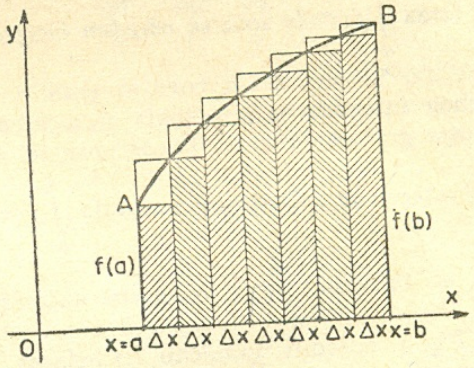
Bajtarević Ahmed, 4. r. g. Visoko, 171 (djel.), 172 (djel.), 173; *Bogovčić Franci*, 3.b raz. g. Brežice, 172 (djel.); *Bodlović Petar*, 8.a r. l, g. Zagreb, 171 (djelom.), 172, 173, 174, 175; *Bradač Primož*, 2. b r. l. g. Ljubljana, 171, 173; *Dvizac Menail*, 3. raz. g. STŠ Mostar, 171; *Gros Mladen*, 4. a raz. 4. g. Ljubljana, sve zadatke; *Hendeković Josip*, 4. b raz. 2 g. Zagreb, 171 (djel.), 172 (djel.), 173, 174, 175; *Kovačina Marko*, 3_2 raz. gimn. Mostar, 173; *Lautar Franc*, 2. a raz. g. Kočevje, 171, 173; *Letić Milan*, 4. c raz. g. Subotica, 171, 175; *Mesihović Behđed*, 3_2 r, g. Mostar, 171, 172; 173; *Suljagić Salih*, 7. c r. 5. g. Zagreb, 171 (djel.), 173 (djel.); *Šušić M. Tomislav*, 4_4 r. g. Čačak, 171 (djel,), 172, 174, 175; *Kapajuuh Ђ. Милисав*, 3_2 р. г. Чачак, 171.

Vježbe za učenike gimnazija i srednjih stručnih škola

Prvi elementi infinitezimalnog računa

10. Pojam određenog integrala

Neka je $y = f(x)$ u intervalu $[a, b]$ neprekidna i pozitivna funkcija. Geometrijska slika te funkcije neka je krivulja AB. Postavimo si zadatak, da odredimo površinu omeđenu osi apscisa, ordinatama, koje pripadaju apscisama $x = a$, $x = b$ i lukom krivulje. Tu ćemo površinu označiti s P.



Sl. 1.

Razdijelimo interval $[a, b]$ na n jednakih dijelova; ako je dužina svakog dijela Δx, to je $n\Delta x = b - a$. U svakom djelištu povučimo ordinate i nacrtajmo n pravokutnika krivulji upisanih, i n pravokutnika krivulji opisanih, kako je to na sl. 1 naznačeno. Visine tih pravokutnika jesu jednake redom: $f(a)$, $f(a + \Delta x)$, $f(a + 2\Delta x) \ldots . f[a + (n-1)\Delta x]$, posljednja je visina $f(b)$, dok je svaka baza jednaka Δx. Zbroj površina upisanih pravokutnika jest

$$P_n = f(a)\Delta x + f(a + \Delta x)\Delta x + \cdots + f[a + (n-1)\Delta x]\Delta x.$$

a zbroj površina opisanih pravokutnika jest

$$P'_n = f(a+\Delta x)\,\Delta x + f(a+2\Delta x)\,\Delta x + \\ + \cdots + f(b)\,\Delta x.$$

Što je veće n t. j. što smo na više dijelova razdijelili interval $[a, b]$, to će se zbrojevi P_n i P'_n manje razlikovati i između sebe i od tražene površine P, što je omeđuje krivulja. To se može razabrati ovako:

Tražena se površina nalazi svakako između P_n i P'_n t. j. $P_n < P < P'_n$. Nadalje je

$$P'_n - P_n = [f(b) - f(a)]\,\Delta x \quad \text{i} \\ \lim_{n\to\infty} (P'_n - P_n) = 0,$$

jer je za $n \to \infty$, $\Delta x \to 0$.

Izlazi dakle, kad $n \to \infty$, da oba zbroja, između kojih se nalazi P, konvergiraju prema zajedničkoj granici, koja može jedino biti P. Dakle je P jednako ili $\lim P_n$ ili $\lim P'_n$ za $n \to \infty$. Možemo zato pisati:

$$P = \lim_{\Delta x\to 0} \{f(a) + f(a+\Delta x) + \\ + \cdots + f[a + (n-1\,\Delta x]\}\,\Delta x.$$

Ta se granica označuje sa $\int_a^b f(x)\,dx$, gdje znak $\int$ ima ovdje novo značenje, značenje zbroja, a $f(x)\,dx$ sjeća nas na oblik pribrojnika toga zbroja.

Izraz $\int_a^b f(x)\,dx$ zove se *određeni integral* od $f(x)\,dx$, brojevi a i b zovu se *granice* određenog integrala, a jest donja granica, b jest *gornja* granica; interval $[a, b]$ zove se *interval integracije* određenog integrala $\int_a^b f(x)\,dx$.

Da se izračuna $\int_a^b f(x)\,dx$, treba načiniti P_n ili P'_n i odrediti graničnu vrijednost tog izraza za $n \to \infty$.

Primjer. Neka se odredi površina omeđena osi x, ordinatama za $x = 2$, $x = 3$ i lukom krivulje $y = x^3$.

Interval [2, 3] razdijelimo na n jednakih dijelova, svaki dio jest $\frac{1}{n}$, apscise pojedinih dijelova jesu $2,\ 2+\frac{1}{n},\ 2+\frac{2}{n},\ \ldots\ 2+\frac{n-1}{n}$.

Zato je

$$P_n = 2^3\cdot\frac{1}{n} + \left(2+\frac{1}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n} + \left(2+\frac{2}{n}\right)^3\cdot \\ \cdot\frac{1}{n} + \cdots + \left(2+\frac{n-1}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}.$$

$$P_n = 2^3\cdot\frac{1}{n} + 2^3\cdot\frac{1}{n} + 3\cdot 2^2\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \\ + 3\cdot 2\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{n} + 2^3\cdot\frac{1}{n} + \\ + 3\cdot 2^2\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n} + 3\cdot 2\cdot\frac{2^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{2^3}{n^3}\cdot\frac{1}{n} + \\ + \cdots + 2^3\cdot\frac{1}{n} + 3\cdot 2^2\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \\ + 3\cdot 2\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n} + \frac{(n-1)^3}{n^3}\cdot\frac{1}{n}.$$

$$P_n = n\cdot 2^3\cdot\frac{1}{n} + 3\cdot 2^2\cdot\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots + \\ + n-1) + 3\cdot 2\cdot\frac{1}{n^3}[(1^2+2^2+\cdots+(n- \\ -1)^2)] + \frac{1}{n^4}[1^3+2^3+\cdots(n-1)^3].$$

Kako je (vidi algebru)

$$1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2 = \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6},$$

$$1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4},$$ to je

$$P_n = 2^3 + 3\cdot 2^2\,\frac{1}{n^2}\,\frac{n^2-n}{2} + 3\cdot\frac{2}{n^3}\,\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \\ + \frac{1}{n^4}\,\frac{n^2(n-1)^2}{4} = 2^3 + 3\cdot 2^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right) + \\ + \frac{3\cdot 2}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2.$$

Zato je

$$\lim_{n\to\infty} P_n = 2^3 + 3\cdot 2^2\cdot\frac{1}{2} + \frac{3\cdot 2\cdot 2}{6} + \frac{1}{4} = \\ = 8+6+2+\frac{1}{4} = 16\frac{1}{4},$$ pa je dakle

$$P = \int_2^3 x^3\,dx = 16\frac{1}{4}.$$

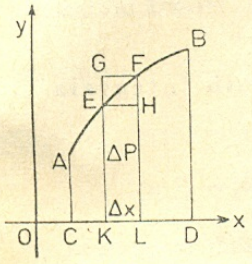
U općenitom slučaju bilo bi izračunavanje točne vrijednosti određenih integrala na taj način vrlo teško, a često i nemoguće. Treba zato naći drugu metodu, da se uzmognu odrediti granice gornjih zbrojeva za $n \to \infty$. Tu ćemo metodu sad upoznati.

11. Veza između određenog i neodređenog integrala

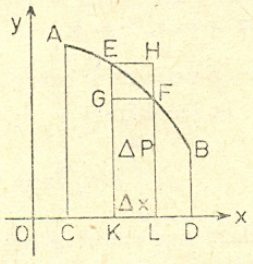
Neka je $y = f(x)$ neprekidna i pozitivna funkcija u intervalu $[a, b]$, koja u tom intervalu monotono raste (t. j. da u tom intervalu neprestano raste). Geometrijska slika te funkcije neka je krivulja AB.

Apscisa OC jednaka je a, a apscisa OD jednaka je b. Povučemo li u bilo kojoj točki na osi apscise između a i b na pr. u K ($OK = x$) ordinatu y krivulje, to će površina $AEKC$ (omeđena osi apscisa, ordinatama, koje pripadaju apscisama a i x i lukom AE krivulje) zavisiti očito o x, ona je funkcija od x. Označimo tu površinu s $P(x)$. Neka x naraste za Δx, površina naraste za $KLEF = \Delta P$. Iz sl. 2. se razabira da je:

$$KLEH < KLEF < KLGF \quad \text{ili}$$
$$y\,\Delta x < \Delta P < (y + \Delta y)\,\Delta x \quad \text{ili}$$
$$y < \frac{\Delta P}{\Delta x} < y + \Delta y.$$



Sl. 2.



Sl. 3.

Ako pak funkcija $f(x)$ u intervalu $[a, b]$ monotono pada, tad je, jer je sada $\Delta y < 0$ (sl. 3.)

$$KLGF < KLEF < KLEF \quad \text{ili}$$
$$(y + \Delta y) < \Delta P < y\,\Delta x \quad \text{ili}$$
$$y + \Delta y < \frac{\Delta P}{\Delta x} < y.$$

Kad $\Delta x \to 0$, $\frac{\Delta P}{\Delta x} \to$ prema $\frac{dP}{dx} = P'$, y se ne mijenja, a $y + \Delta y \to y$; za $\Delta x \to 0$ izlazi

$$\frac{dP}{dx} = y = f(x) \quad \text{ili} \quad dP = y\,dx = f(x)\,dx.$$

Da se dakle nađe površina $P(x)$, treba naći takvu funkciju od x, od koje je derivacija jednaka $y = f(x)$ ili od koje je diferencijal jednak $f(x)\,dx$. Ako je $F(x)$ jedna takova funkcija od x, da je $F'(x) = f(x)$, onda je sasvim općenito $P(x) = F(x) + C$, jer je i derivacija od $F(x) + C$ jednaka $f(x)$. Izraz $P(x) = F(x) + C$ znači površinu $AEKC$, gdje se ordinata EK može povući bilo gdje nadesno od točke C između C i D. Ali ako se EK podudara s AC, onda je $x = a$ i površina je jednaka nuli. Zato je

$$0 = F(a) + C \quad \text{t. j.} \quad C = -F(a).$$

Površina $P(x)$ postaje sad jednaka $F(x) - F(a)$. Hoćemo li izračunati cijelu površinu $ABDC$, moramo staviti $x = b$. Zato je

$$P = F(b) - F(a).$$

Ali mi smo tu površinu označili također s $\int_a^b f(x)\,dx$, pa je $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, gdje je $F'(x) = f(x)$.

Iz svega izlazi ovo: da se izračuna određeni integral $\int_a^b f(x)\,dx$, koji znači površinu omeđenu lukom krivulje jednadžbe $y = f(x)$, osi apscisa i ordinatama, koje pripadaju apscisama $x = a$, $x = b$, izračunat će se neodređeni integral $\int f(x)\,dx$), zatim će se uvrstiti u dobiveni izraz granice integrala i to najprije gornja, zatim donja i druga će se vrijednost od prve oduzeti.

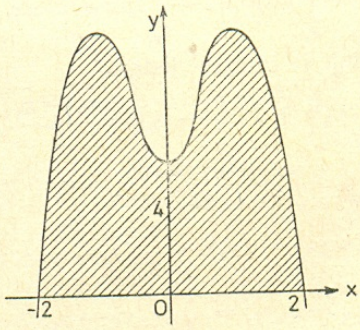
$F(b) - F(a)$ označuje se obično s $\Big|_a^b F(x)$, pa je $\int_a^b f(x)\,dx = \Big|_a^b F(x) = F(b) - F(a)$.

Primjer. 1. U našem predašnjem primjeru $y = x^3$ imamo

$$P = \int_2^3 x^3\,dx = \Big|_2^3 \frac{x^4}{4} = \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4} =$$
$$= \frac{81}{4} - \frac{16}{4} = \frac{65}{4} = 16\,\frac{1}{4},$$

što je na taj način vrlo lako izračunati.

Primjer 2. Izračunaj površinu omeđenu krivuljom $y = -x^4 + 3x^2 + 4$, i osi x između $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.



Sl. 4.

$$P = \int_{-2}^{2} (-x^4 + 3x^2 + 4)\,dx = \Big|_{-2}^{2} -\frac{x^5}{5} + x^3 +$$
$$+ 4x = \frac{-32}{5} + 8 + 8 - \left(\frac{+32}{5} - 8 - 8\right) = \frac{96}{5},$$

Primjer 3. *Izračunavanje površine parabole.* Ako je $y^2 = 2px$ jednadžba parabole, izra-

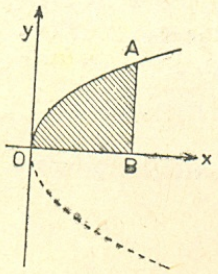
čunat će se površina omeđena lukom parabole OA, osi apscisa i ordinatom, koja pripada bilo kojoj pozitivnoj apscisi x, da se izračuna $\int_0^x \sqrt{2px}\,dx$. Kako je

$$\int_0^x \sqrt{2px}\,dx = \sqrt{2p}\int_0^x x^{\frac{1}{2}}\,dx, \text{ to je}$$

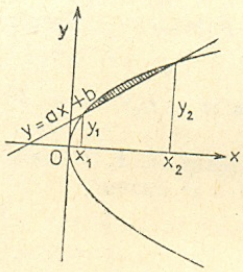
$$P = \sqrt{2p}\left|_0^x \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\cdot\sqrt{x}\cdot x = \right.$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2px}\cdot x = \frac{2}{3}xy.$$

Luk parabole dijeli površinu pravokutnika stranica x i y u omjeru 2 : 1.



Sl. 5.



Sl. 6.

Primjer 4. *Površina parabolina segmenta.* Izračunajmo površinu segmenta, što ga pravac $y = ax + b$ reže na paraboli $y^2 = 2px$ (sl. 6.). Ako su x_1, y_1, x_2, y_2 koordinate sjecišta, površina je segmenta

$$P = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2px}\,dx - \int_{x_1}^{x_2} (ax + b)\,dx.$$

Posljednji je integral jednak

$$\frac{a}{2}(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_2) = \frac{x_2 - x_1}{2}(ax_2 +$$

$$+ b + ax_1 + b) = \frac{x_2 - x_1}{2}(y_2 + y_1).$$ Zato je

$$P = \frac{2}{3}(x_2y_2 - x_1y_1) - \frac{1}{2}(x_2y_2 + x_2y_1 -$$

$$- x_1y_2 - x_1y_1) = \frac{1}{6}(x_2y_2 - x_1y_1) -$$

$$- \frac{1}{2}(x_2y_1 - x_1y_2).$$

Zbog $x_1 = \frac{y_1^2}{2p}$, $x_2 = \frac{y_2^2}{2p}$ izlazi

$$P = \frac{1}{6}\left(\frac{y_2^3}{2p} - \frac{y_1^3}{2p} - \frac{3y_2^2y_1}{2p} + \frac{3y_1^2y_2}{2p}\right) =$$

$$= \frac{1}{12p}(y_2 - y_1)^3.$$

Dosad smo pretpostavljali, da je $y = f(x)$ u cijelom intervalu (a, b) pozitivno; ali ako krivulja $y = f(x)$ siječe os x na pr. u c i d $(a < c < d < b)$, izračunat će se površina, što je određuje površina krivulje tako, da se izračunaju napose integrali

$$\int_a^c f(x)\,dx, \int_c^d f(x)\,dx, \int_d^b f(x)\,dx,$$

pa prvi i treći da se zbroje i drugi od zbroja da se oduzme. Sam izraz $\int_a^b f(x)\,dx$ znači u tom slučaju algebarski zbroj površine omeđenih krivuljom $y = f(x)$, osi x i ordinatama za $x = a$, $x = b$.

Svojstva određenih integrala

Iz jednakosti

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

izlaze ova svojstva određenih integrala:

1. Vrijednost određenih integrala ne zavisi o varijabli integracije već samo o granicama.
2. Zamijene li se granice integrala među sobom, određeni integral mijenja znak:

$$\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b) = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

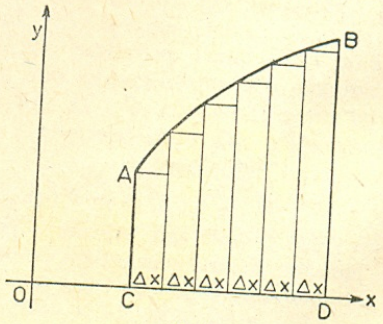
3. Ako je $f(x)$ neprekidna funkcija između a i c to je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx,$$

jer je desna strana ove jednakosti jednaka $F(b) - F(a)$.

Izračunavanje obujma rotacionog tijela

Označimo sa V obujam rotacionog tijela, koje nastaje rotacijom površine $ABCD$ omeđene krivuljom $y = f(x)$, ordinatama za $x = a$,



Sl. 7.

$x = b$ i osi apscisa oko osi x. Funkcija $f(x)$ je u $[a, b]$ neprekidna i pozitivna.

Da taj obujam odredimo, upišimo krivulji $y = f(x)$ n pravokutnika baze $\Delta x = \frac{b-a}{n}$; kad površina $ABCD$ rotira oko osi x, svaki pravokutnik opisuje rotacioni valjak. Zbroj obujmova rotacionih valjaka bit će

$$S = \pi y_0^2 \Delta x + \pi y_1^2 \Delta x + \cdots + \pi y_{n-1}^2 \Delta x = \\ = \pi [y_0^2 \Delta x + y_1^2 \Delta x + \cdots + y_{n-1}^2 \Delta x].$$

Zamislimo sada krivulju, kojoj je jednadžba $y = [f(x)]^2 = \psi(x)$. Kad $\Delta x \to 0$, izraz u zagradi teži prema $\int_a^b \psi(x)\,dx = \int_a^b f^2(x)\,dx$, pa će obujam rotacionog tijela biti

$$\pi \int_a^b \psi(x)\,dx = \pi \int_a^b y^2\,dx,$$

gdje je $y = f(x)$.

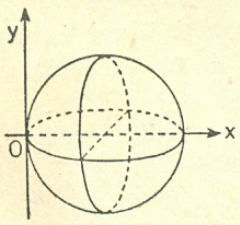
Primjer 1. Odredi obujam kugle, što je opisuje krug $y^2 = 2rx - x^2$ rotacijom oko osi x.

Traženi je obujam

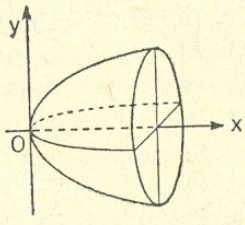
$$\pi \int_0^{2r} y^2\,dx = \pi \int_0^{2r} (2rx - x^2)\,dx =$$

$$= \pi \Big| rx^2 - \frac{x^3}{3} = \pi \left(4r^3 - \frac{8}{3} r^3\right) = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

Za vježbu uzmi jednadžbu kruga $x^2 + y^2 = r^2$.



Sl. 8.



Sl. 9.

Primjer 2. Odredi obujam tijela, koje nastaje rotacijom površine omeđene lukom parabole $y^2 = 2px$, ordinatom, koja pripada apscisi x i osi x oko osi x (rotacioni paraboloid).

$$V = \pi \int_0^x y^2\,dx = \pi \int_0^x 2px\,dx = p\pi x^2 = \\ = \frac{2px}{2} \cdot x\pi = \frac{xy^2}{2} \pi.$$

Zadaci za uvježbavanje

1. Odredi površinu omeđenu lukom krivulje $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, osi x i ordinatama, koje pripadaju ekstremnim vrijednostima te funkcije.

$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0$ za $x = 1$, $x = 3$.

Tražena je površina

$$P = \int_1^3 (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\,dx = 6.$$

2. Isti zadatak za $y = x^3 - 3x^2 + 24$.

$$P = \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 24) = 44.$$

3. Odredi površinu omeđenu lukom krivulje $y = -x^4 + 8x^2 + 5$ ordinatama, koje pripadaju maksimumima te funkcije i osi x.

$$P = \int_{-2}^2 (-x^4 + 8x^2 + 5)\,dx =$$

$$= 2 \int_0^2 (-x^4 + 8x^2 + 5)\,dx =$$

$$= 2 \Big| -\frac{x^5}{5} + \frac{8x^3}{3} + 5x =$$

$$= 2 \left(-\frac{32}{5} + \frac{64}{3} + 10\right) = \frac{748}{15}.$$

4. Odredi površinu omeđenu lukom krivulje $y = 2\cos^2 x - \cos x + 1$, ordinatama za $x = 0$, $x = \pi$ i osi apscisa

$$P = \int_0^\pi (2\cos^2 x - \cos x + 1)\,dx =$$

$$= \Big|_0^\pi 2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right) - \sin x + x = 2\frac{\pi}{2} + \pi = 2\pi.$$

5. Izračunaj površinu omeđenu krivuljom $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 46$, osi x i ordinatama za $x = -2$, $x = 6$.

$$P = \int_{-2}^6 (x^3 - 6x^2 - 15x + 46)\,dx.$$

Ako se izračuna taj integral, izlazi površina jednaka nuli, što znači, da je jedan dio krivulje između $x = -2$ i $x = 6$ iznad osi x, jedan dio ispod osi x i da oba dijela imaju jednaku površinu.

Krivulja siječe os x u točki $x = 2$, pa je

$$\int_{-2}^2 (x^3 - 6x^2 - 15x + 46)\,dx = 152,$$

$$\int_2^6 (x^3 - 6x^2 - 15x + 46)\,dx = 152,$$

pa je tražena površina $P = 304$.

6. Dokaži poučak: površina omeđena lukom krivulje $y = a_0x^3 + a_1x^3 + a_2x + a_3$, osi apscisa i ordinatama za $x = a$, $x = a + 2h$ jednaka je $P = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$, gdje y_0 znači ordinatu za $x = a$, y_1 ordinatu za $x = a + h$, y_2 ordinatu za $x = a + 2h$ (Simpsonovo pravilo).

7. Izračunaj na taj način površinu u zadacima 1, 2, 5.

8. Pravac $y = kx$ rotira oko osi x. Izračunaj obujam *a*) uspravna stošca, *b*) krnjeg stošca.

$$a)\ V = \pi \int_0^x (kx)^2\,dx = \Big|_0^x k^2\pi\,\frac{x^3}{3} =$$

$$= \pi \cdot \frac{k^2x^2}{3} \cdot x = \frac{y^2}{3}\pi x,$$

$$b)\ V = \pi \int_{x_1}^{x_2} k^2x^2\,dx = \frac{\pi k^2}{3}(x_2^3 - x_1^3) =$$

$$= \frac{\pi k^2}{3}(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) =$$

$$= \frac{\pi v}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

9. Izračunaj obujam rotacionog tijela, što ga opisuje krivulja $y = \cos^2 x$ rotirajući oko osi x između $x = 0$ i $x = \pi$.

$$V = \pi \int_0^\pi \cos^4 x\,dx = \frac{\pi}{4}\int_0^\pi \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\cos 4x\right)dx = \frac{\pi}{4}\Big|_0^\pi \frac{3}{2}x + \sin 2x +$$

$$+ \frac{1}{8}\sin 4x = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{3}{2}\pi = \frac{3}{8}\pi^2.$$

10. Dokaži poučak: ako rotaciono tijelo visine $2h$ ima na os normalne presjeke oblika $\pi y^2 = \pi(a_0x^2 + a_1x + a_2)$ (neki od brojeva a_0, a_1, a_2 mogu biti i jednaki nuli), to je njegov obujam $V = \frac{h}{3}(D + 4S + G)$, gdje D znači donji presjek $[f(a)]^2\pi$, S znači srednji presjek $[f(a + h))^2\pi$, G znači gornji presjek $f(a + 2h)]^2\pi$.

Izračunaj s jedne strane $\frac{h}{3}(D + 4S + G)$, a s druge strane $\pi \int_a^{a+2h} (a_0x^2 + a_1x + a_2)\,dx$ i isporedi rezultate.

11. S pomoću formule u zadatku 12. izračunaj α) obujam stošca, β) obujam krnjeg stošca, γ) obujam kugle.

a) $S = \frac{r^2\pi}{4}$, *b*) Ako je $2h$ visina krnjeg stošca d udaljenost presjeka od vrha stošca, to je

$$\frac{S}{d^2} = \frac{D}{(d+h)^2} = \frac{G}{(d-h)^2} \text{ ili } \frac{\sqrt{S}}{D} = \frac{\sqrt{D}}{d+h} = \frac{\sqrt{G}}{d-h} \text{ ili } \sqrt{S} = \frac{\sqrt{D} + \sqrt{G}}{2},\ c)\ D = G = 0,$$

$$S = r^2\pi,\ V = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

Nagrađeni rješavatelji zadataka

a) iz matematike

1. *Bajtarević Ahmed*, 4. r. g. Visoko
2. *Bodlović Petar*, 4.a r. 1. g. Zagreb
3. *Dvizac Menail*, 3. Am. STŠ Mostar
4. *Đurić G. Zoran*, 4. r. g. Čačak
5. *Gros Mladen*, 4.a r. 4. g. Ljubljana
6. *Hendeković Josip*, 4. r. 2. g. Zagreb
7. *Jeremić Đurđe*, 3_3 r. g. »Sv. M.« Niš
8. *Kirić Miodrag*, 3_3 r. g. Zrenjanin
9. *Lesjak Janez*, 3. r. g. Kočevje
10. *Lojen Miroslav*, 4.c r. g. Varaždin
11. *Maček Vilko*, 2.b r. 4. g. Ljubljana
12. *Mesihović Behđed*, 3_2 r. g. Mostar
13. *Pavlović Vladan*, 4_3 r. g. Svetozarevo
14. *Stanojević Jevrosima*, 4. r. g. »Sv. M.« Niš
15. *Suljagić Salih*, 3c r. 5. g. Zagreb
16. *Šušić M. Tomislav*, 4. r. g. Čačak

b) iz fizike

1. *Bajtarević Ahmed*, 4. r. g. Visoko
2. *Bodlović Petar*, 4.a r. 1. g. Zagreb
3. *Gros Mladen*, 4.a r. 4. g. Ljubljana
4. *Hendeković Josip*, 4. r. 2. g. Zagreb
5. *Lesjak Janez*, 3.a r. g. Kočevje
6. *Šušić M. Tomislav*, 4. r. g. Čačak

Učenici su nagrađeni knjigama iz područja matematike odnosno fizike.

Rešenje ukrštenice iz br. 3 i nagrađeni rešavaoci

Vodoravno:

1 — 21581
5 — 135
7 — 32
8 — 5410
10 — 59, 6
12 — 57; 57
14 — 123, 325
16 — 54
18 — 2950
19 — 5560
21 — 2401
23 — 29, 1
24 — 52, 6
26 — 4356
28 — 84040

Uspravno:

1 — 23512
2 — 1, 29292
3 — 85
4 — 145, 2
5 — 10, 5
6 — 54
9 — 1755
11 — 63, 54
13 — 75, 69
15 — 300
17 — 4010
20 — 52650
22 — 15, 48
25 — 234
27 — 64

Od 45 stiglih rešenja 30 ih je bilo pravilnih. Knjigom Polya: »Kako ću riješiti matematički zadatak?« nagrađeni su:

1. Arsova Mitra, 1 god. ekon. tehn. Kočani
2. Bajić Bogoljub, 3 r. g. Pjevlja
3. Beraković Boris, 2b r. II. g. »Braća Ribar«, Zagreb
4. Cankar Ivan, 3 r. g. Škofja Loka
5. Indihar Stane, 3 r. g. Kočevje
6. Knego Ivo, 3c r. g. Dubrovnik
7. Marković Mihailo, 4_7 r. g. Zemun
8. Mihailović Dragoslav, 3_2 r. II. g. Kragujevac
9. Mitrović Mile, 4_2 r. g. »V. Karadžić« Loznica
10. Šušić Tomislav, 4_4 r. g. Čačak

Broj pretplatnika na Mat. fiz. list na pojedinim školama 1958./59.

Aleksinac, g. (8); *Aranđelovac*, g. (91); *Bačka Palanka*, g. (22); *Bačka Topola*, osn. šk. (12); *Banja Luka*, g. (100); sred. t. šk. (16); *Bar*, g. (71); *Bečej*, g. (33); *Bela Crkva*, g. (10); *Bela Palanka*, g. (58); *Beograd*, I. g. (94); 2. g. (56); 3. g. (42); 5. g. (3); 6. g. (125); 8. g. (105); 11. g. (219); 13. g. (12); 14. g. (129); 15. g. (146); građ. sr. teh. šk. (119); graf. ind. škola (80); MTSŠ »Petar Drapšin« (221); *Berovo*, g. (20); *Bijelo Polje*, g. (67); *Bijeljina*, g. (8); *Bitola*, g. (135); *Bjelovar*, g. (71); *Borski Rudnik*, STRŠ (65); *Bosilegrad*, g. (13); *Brčko*, g. (18); *Brežice*, g. (33); *Buje*, g. (28); *Celje*, g. (40); *Cetinje*, g. (110); *Crikvenica*, g. (4); *Čačak*, g. (155); *Čakovec*, uč. šk. (279); *Čuprija*, g. (169); *Daruvar*, g. (15); *Delnice*, g. (56); *Dimitrovgrad*, g. (24); *Doboj*, g. (31); *Dubrovnik*, uč. šk. (24); g. (146); *Đakovo*, g. (8); *Foča*, g. (6); *Gevgelija*, g. (22); *Goražde*, g. (65); *Gor. Milanovac*, g. (16); *Gospić*, g. (6); *Gradačac*, g. (28); *Grahovo*, g. (19); *Idrija*, g. (20); *Imotski*, g. (69); *Stična*, g. (11); *Ivangrad*, g. (250); *Jesenice*, g. (63); *Karlovac*, g. (150); *Kičevo*, g. (118); *Kikinda*, g. (51); *Knin*, g. (29); *Kočevje*, g. (27); *Koper*, g. (20); *Koprivnica*, g. (90); *Košutnjak*. osn. šk. (36); *Kragujevac*, 1. g. (120); 2. g. (82); *Kranj*, g. (77); *Krapina*, g. (5); *Krk*, g. (10); *Kumanovo*, g. (80); *Leskovac*, g. (14); *Loznica*, g. (55); *Ljubljana*, 1. g. (63); 3. g. (14); 4. g. (54); 7. g. (3); *Maribor*, 1. g. (35); *Maribor*, 1. g. (35); teh. sr. š. (45); *Metković*, g. (128); *Mladenovac*, osn. šk. (47); *Mostar*, uč. šk. (30); sr. teh. šk. (105); g. (30); *Murska Sobota*, g. (65); *Našice*, g. (25); *Negotin*, g. (22); *Nikšić*, g. (225); *Niš*, g. »Sv. Marković« (270); g. »S. Sremac« (156); osm. šk. »D. Obradović« (25); *Nova Gradiška*, g. (93); *Novi Kneževac*, osn. šk. (14); *Novi Pazar*, g. (30); *Novi Sad*, g. (53); g. »Sv. Marković« (110); g. »Moša Pijade« (100); *Novo Mesto*, gim. (28); *Obrenovac*, gim. (2); *Ohrid*, g. (100); *Osijek*, g. »I. L. Ribara« (73); gim. »S. Bertić« (45); sred. teh. šk. (127); *Pakrac*, uč. šk. (51); *Pančevo*, g. (45); *Paraćin*, g. (9); *Pazin*, g. (9); *Peć*, g. (40); *Pirot*, g. (32); *Plav*, osn. šk. (4); *Plevlja*, g. (49); *Ploče*, g. (77); *Postojna*, g. (5); *Posušje*, osmog. šk. (20); *Požarevac*, g. (125); *Prilep*, g. (38); *Debrešte Prilepsko*, osn. šk. (2); *Priština*, g. (170); viša ped. šk. (15); *Prizren*, uč. šk. (100); *Ptuj*, g. (30); *Pula*, g. (83); uč. šk. (50); *Ravne na Koroškem*, g. (83); *Rijeka*, g. »Mirko Lenac« (110); 1. g. (43); uč. šk. (9); *Rovinj*, g. (19); *Ruma*, g. (152); *Sarajevo*, 1. klas. gim. (165); 2. g. (125); 3. g. (134); 4. g. (26); sr. teh. šk. (31); uč. šk. (94); G. S. T. Š. (9); *Senta*, g. (17); *Sesvete*, osn. šk. (12); *Sinj*, g. (60); *Sisak*, g. (12); *Sjenica*, osn. šk. (16); *Skopje*, osn. šk. »Nedelkovski« (8); g. »Josip Broz Tito« (89);

g. »Cv. Dimov« (230); g. »Orce Nikolov« (63); *Slav. Požega*, g. (80); *Slav. Brod*, g. (16); *Smederevo*, g. (10); *Smed. Palanka*, g. (47); *Sombor*, g. (224); *Split*, 1. g. (33); g. »Vl. Nazor« (49); *Srem. Karlovci*, g. (34); *Srem. Mitrovica*, g. (120); *Stara Pazova*, sr. ekon. šk. (23); *Subotica*, g. (73); sred. teh. šk. (241); *Svetozarevo*, g. (16); *Svilajnac*, g. (41); *Šabac*, g. (90); *Šibenik*, g. (40); *Škofja Loka*, g. (11); *Titograd*, sr. teh. šk. (170); g. (61); *Titov Veles*, g. (135); *Tolmin*, učit. (5); *Travnik*, g. (90); *Trbovlje*, g. (57); *Trstenik*, g. (20); *Tuzla*, g. (102); VI. osn. šk. (3); *Ub*, osn. šk. »M. Munjas« (99); *Uroševac*, sr. ek. šk. (5); *Valjevo*, g. (105); teh. sr. šk. (98); *Varaždin*, g. (124); *Vinkovci*, g. (50); *Virovitica*, g. (30); *Visoko*, g. (13); *Vranje*, g. (30); *Vrbas*, g. (12); *Vršac*, g. (69); *Vukovar*, g. (101); *Zadar*, g. (91); *Zagreb*, 1. g. (340); 2. g. (273); 3. g. (143); 4. g. (127); 5. g. (81); 6. g. (25); 7. g. (153); 8. g. (81); 9. g. (147); klas. g. (35); osn. šk. II. Kaptol, (33); II. osn. šk. Kršnjavoga (3); XIV. osn. šk. Ul. A. Butorac (18); II. uč. šk. (13); teh. šk. (14); *Zaječar*, g. (104); *Zemun*, gimn. (138); osn. šk. »S. Marinković« (2); *Zenica*, g. (102); *Zrenjanin*, I. g. (89); II. g. (170); *Zvornik*, g. (120).

Za vrijeme štampanja lista stigla su ova rješenja

Iz matematike: *Čanji Ana*, 2 razred g. Sombor, 349, 355; *Jorgačević Mirjana* g. »Uroš Predić«, Pančevo, 349; *Kovač Antal*, 4 b r. g. Sombor, 349, 350, 352, 354, 355, 356, 361; *Aџић Милица*, 1 р. г. »Ст. Церовац«, Никшић, 349, 361; *Гвоздић Стеван*, 2 а р. г. Вршац, 349, 354, 356; *Јеремић Душан*, 3_3 раз. г. »Св. Марк.«, Ниш, 349, 354, 355, 356, 360, 361; *Јовановић Јован*, 4_2 р. г. Аранђеловац, 349, 354, 356, 361, 362; *Лешић Милан*, 4 е р. г. »М. Пијаде«, Суботица, 349, 352, 354, 356, 360, 361; *Момиров Дејан*, 1_3 р. 1 г. Зрењанин, 349, 354, 355, 361; *Николовски Тихомир*, 4_2 кл. гимн. »Ј. Б. Тито«, Скопје, (у броју 3 грешком штампано Битола), 349, 351, 352 (делом.), 353, 354, 355, 356, 361, 362; *Петровић Гроздан*, 2_3 раз. г. »Ст. Сремац«, Ниш, 349, 354, 355, 356, 362; *Стојановски Слободанка*, 3 а кл. гимн. »Г. Делчев«, Куманово, 349 (дел.), 361 (дел.).

Rješenja, dopise i članke slati na Uredništvo »Matem.-fiz. lista«, Zagreb, Ilica 16/III., pošt. pretinac 165.

Svim suradnicima!

Svi rukopisi (osim učeničkih rješenja) treba da budu napisani pisaćim strojem, a crteži izrađeni tušem na posebnom čvrstom papiru. Rukopisi se ne vraćaju.

Rješavateljima zadataka

U rješenjima treba uvijek napisati i sam zadatak s rednim brojem, ne pozivajući se na broj i datum »Mat.-fiz. lista«, u kome je bio postavljen. Svako rješenje zadataka pisati na posebnom papiru (četvrtini ili pola arka) i to samo na jednoj strani papira. — Svako rješenje treba čitljivo potpisati (ime i prezime), naznačujući razred, školu i mjesto. Nečitljiva i neuredna rješenja ne će se uopće uzeti u obzir.

Umoljavaju se rješavatelji, da samostalno rješavaju zadatke ne tražeći nikako pomoći od nastavnika, a niti od koga drugoga. Umoljavaju se također rješavatelji, da propisno frankiraju listove, koje šalju našoj redakciji.